K305T

NGÔ LONG HẬU - MAI TRƯỜNG GIÁO

KIẾN THỨC
CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO
HÌNH HỌC 12

Tái bản lần thứ nhất

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 13342 / 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Lời nói đầu

Cuốn sách ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Hình học 12*** này nhằm giúp các em học sinh lớp 12 nắm vững nội dung cơ bản và nâng cao kiến thức Hình học.

Kết cấu cuốn sách được chia thành 3 chương:

Chương I: *Khối đa diện và thể tích của chúng.*

Chương II: *Mặt nón, mặt trụ, mặt cầu.*

Chương III: *Phương pháp tọa độ trong không gian.*

Bài ôn tập của các chương và ôn tập cuối năm được đánh số thứ tự từ đầu cho đến hết (1,2..., 148).

Với kết cấu trên, cuốn sách chứa đựng 2 nội dung chính: *Lí thuyết - Bài tập* và *Hướng dẫn giải*.

Trong mỗi chương gồm 3 nội dung chính:

A. *Lý thuyết cần nhớ*;

B. *Ví dụ*;

C. *Đề bài tập*.

Trong mỗi phần lí thuyết có các mục lớn được kí hiệu bằng các chữ số La Mã (I, II,...), các mục lớn này ứng với $1, $2,... trong sách giáo khoa Hình học 12.

Khi làm bài tập ở nội dung C, nếu gặp vướng mắc, bạn đọc nên xem kĩ nội dung B, vì trong đó các tác giả đã đưa ra những ví dụ mẫu cùng với việc phân tích có tính hướng dẫn cho học sinh suy luận khi giải các bài tập tương tự.

Bởi vậy, cuốn sách không những giúp cho các em học sinh có điều kiện thuận lợi trong việc học tập và ôn thi Hình học 12, mà còn là tài liệu tham khảo tin cậy cho các thầy cô giáo giảng dạy môn học này.

Cuốn sách ***Kiến thức cơ bản và nâng cao Hình học 12*** tái bản lần này có chỉnh lí và bổ sung, xin được giới thiệu với các em học sinh, cùng các vị phụ huynh và thầy cô giáo.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I

KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Hình chóp, hình lăng trụ, hình chóp cụt là hình đa diện.

Phần bên trong của mô hình đa diện (kể cả hình đa diện) gọi là khối đa diện

2. Tổng quát: Hình đa diện (gọi tắt là đa diện) là hình không gian được tạo bởi một số hữu hạn miền đa giác phẳng thoả mãn hai tính chất sau:

a. Hai miền đa giác phân biệt hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.

b. Mỗi cạnh của một đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai miền đa giác.

3. Mỗi khối đa diện có thể phân chia được thành nhiều khối tứ diện

4. Khối đa diện lồi là khối đa diện có tính chất đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ của nó luôn thuộc về khối đa diện đó, hoặc là toàn bộ khối đa diện luôn nằm về một phía đối với mặt phẳng chứa một mặt của khối đa diện.

II. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Khối đa diện lồi được gọi là đều loại (a,b) nếu mỗi mặt của nó là một miền đa giác đều a cạnh và đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng b cạnh

2. Người ta chứng minh được chỉ có 5 loại khối đa diện đều.

Khối 4 mặt đều	(tứ diện đều)	Loại (3,3)
Khối 6 mặt đều	(Khối lập phương)	Loại (4,3)
Khối 8 mặt đều		Loại (3,4)

Khối 12 mặt đều	Loại (5,3)
Khối 20 mặt đều	Loại (3,5)

3. Mỗi khối đa diện đều luôn tồn tại một mặt cầu đi qua các đỉnh của khối (mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đều).

III. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Thể tích của khối đa diện là một số dương thoả mãn các tính chất sau:

a. Khối lập phương có cạnh là một đơn vị thì số $V = 1$

b. Hai khối đa diện bằng nhau sẽ có số V như nhau

c. Nếu khối đa diện được phân chia thành hai khối đa diện thì tổng thể tích hai khối đa diện nhỏ đó bằng thể tích khối ban đầu $V_1 + V_2 = V$

2. Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước $V = a.\,b.\,c$

3. Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao $V = B.h$

4. Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ diện tích đáy nhân với chiều cao $V = \frac{1}{3}Bh$

5. Thể tích khối chóp cụt bằng tổng thể tích ba hình chóp có cùng chiều cao với chóp cụt, có đáy bằng đáy lớn, đáy nhỏ và trung bình nhân 2 đáy.

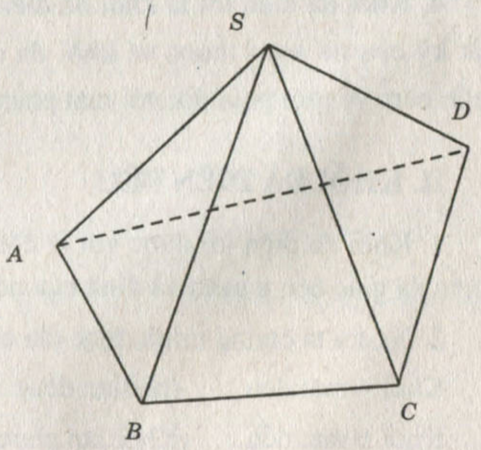
$$V = \frac{1}{3}h(B + B' + \sqrt{BB'})$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh hình chóp SABCD là một đa diện

a) Hình SABCD có

5mặt – 5đỉnh – 8cạnh, do 5 miền đa giác hợp thành trong đó miền tam giác hoặc có 1 đỉnh chung, hoặc có 1 cạnh chung, các miền tam giác và miền tứ giác đều có 1 cạnh chung.



Hình 1

b) 4 cạnh bên, 4 cạnh đáy đều là cạnh chung của đúng 2 miền đa giác (tam giác và tứ giác). Vậy cả 2 tính chất của hình đa diện đều được thoả mãn.

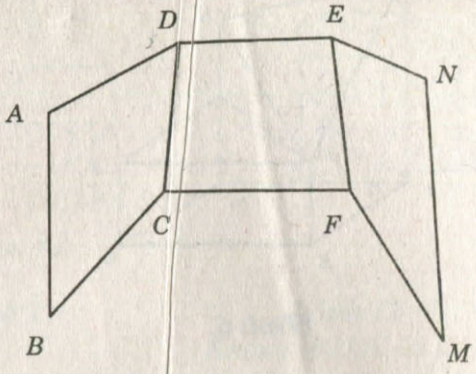
Ví dụ 2:

Chứng minh hình vẽ trong hình 2 không là hình đa diện.

a. Hình 2 do ba miền đa giác ABCD, DCEF, EFMN hợp thành. ABCD và EFMN không giao nhau.

DCEF giao với 2 miền còn lại ở 1 cạnh chung, tính chất a) được thoả mãn.

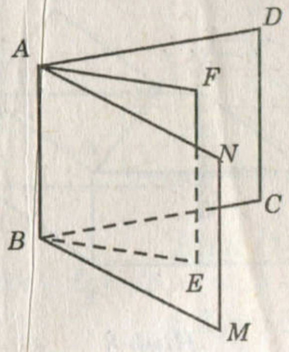
b. Tính chất b) không thoả mãn vì các cạnh AB, AD, BC, DE, CF, FM, MN, NE chỉ là cạnh của một miền đa giác.



Hình 2

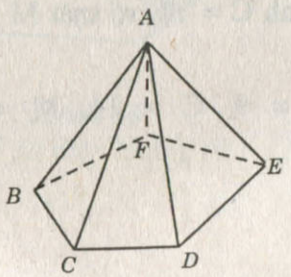
Ví dụ 3: Hình được vẽ ở hình 3 cũng không là hình đa diện vì AB là cạnh chung của 3 miền đa giác, ABCD, ABEF, ABMN. Các cạnh còn lại là cạnh của 1 miền đa giác.

Tính chất b) không được thoả mãn.

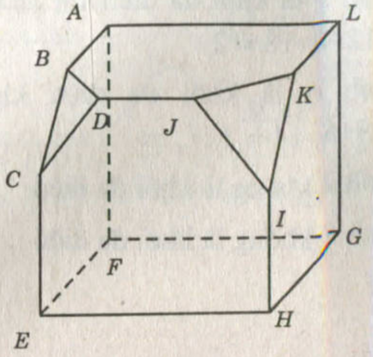


Hình 3

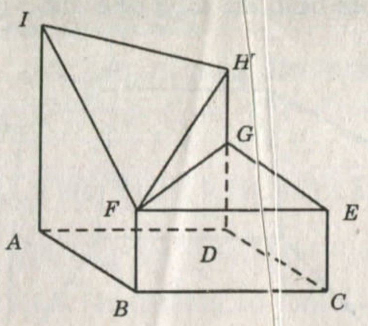
Ví dụ 4. Trong các hình sau, hình nào là hình đa diện? hình nào không là hình đa diện? Nếu là hình đa diện hãy đếm số đỉnh Đ, số cạnh C, số mặt M và tính các số X = Đ + M – C.



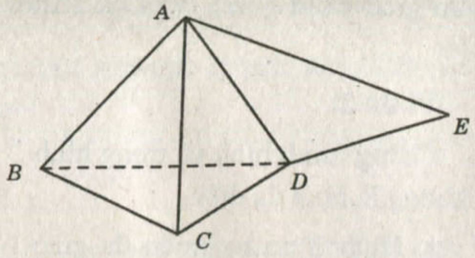
Hình 4



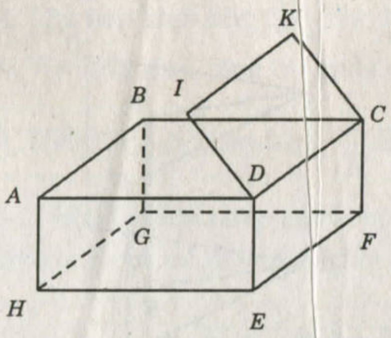
Hình 5



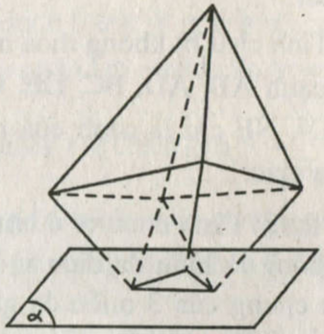
Hình 6



Hình 7



Hình 8



Hình 9

Hình 4 là khối đa diện lồi cụ thể là hình chóp ngũ giác ABCDEF

Có số đỉnh Đ = 6, số cạnh C = 10, số mặt M = 6 $\Rightarrow X_{(H)} = 6 + 6 - 10 = 2$

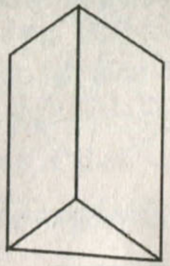
Hình 5 là khối đa diện lồi có Đ = 12 số cạnh C = 18, số mặt M = 8, $X_{(H)} = 12+8-18 = 2$

Hình 6 là khối đa diện không lồi, Đ = 9, C = 14, M = 8, $X_{(H)} = 9+8-14 = 3$

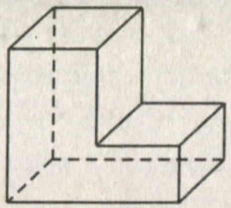
Hình 7 không là khối đa diện

Hình 8 không là khối đa diện

Ví dụ 5. Cũng câu hỏi trên với các hình sau.

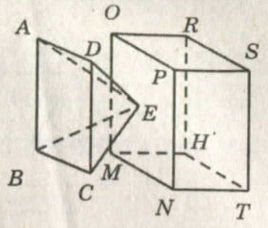


Hình 10
Không là khối đa diện

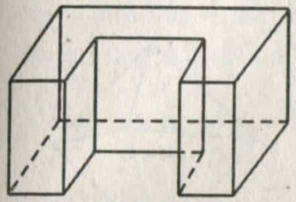


Đ = 12, C = 18, M = 8
$\Rightarrow X_{(H)} = 2$

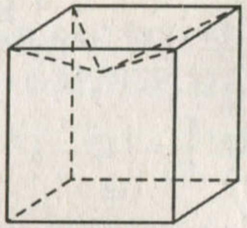
Hình 11



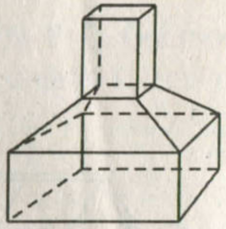
Hình 12
Không là khối đa diện



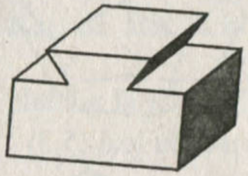
Hình 13
Khối đa diện không lồi



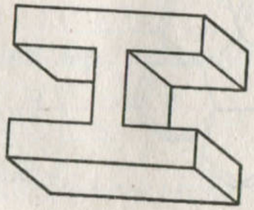
Hình 14
Khối đa diện không lồi



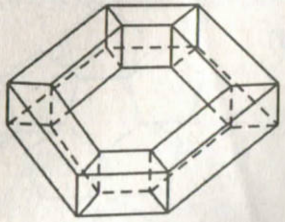
Hình 15
Đ = 16, C = 28, M = 14
$\Rightarrow X_{(H)} = 2$



Hình 16
Khối đa diện không lồi



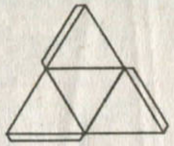
Hình 17
Khối đa diện không lồi



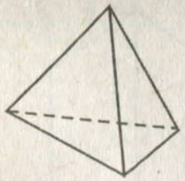
Hình 18
Đ = 24, C = 48, M = 24
$\Rightarrow X_{(H)} = 0$

Ví dụ 6. Cắt giấy theo mẫu sau và dán lại thành khối đa diện đều:

a)

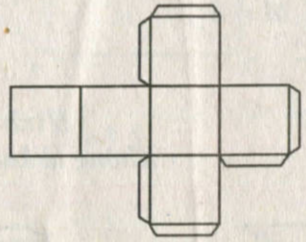


⇒

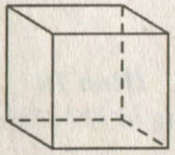


Khối 4 mặt đều loại (3,3)

b)

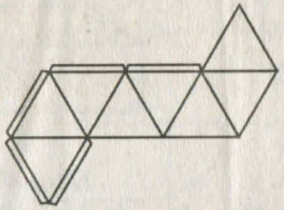


⇒

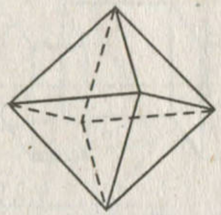


Khối 6 mặt đều loại (4,3)

c)

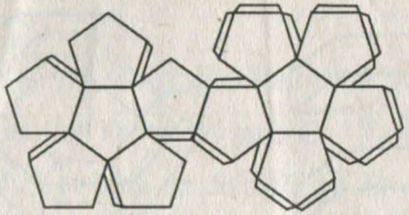


⇒

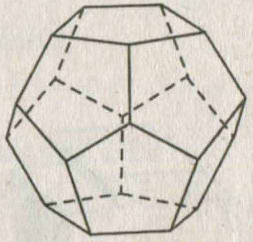


Khối 8 mặt đều loại (3,4)

d)

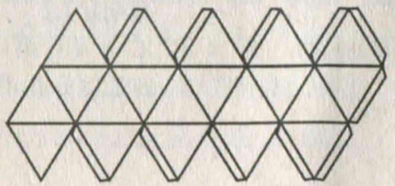


⇒

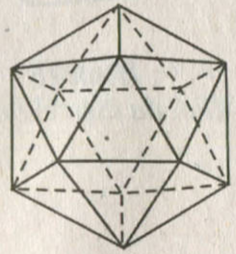


Khối 12 mặt đều loại (5,3)

d)



⇒



Khối 20 mặt đều loại (3,5)

Hình 19

Ví dụ 7: Cho hình tám mặt đều cạnh a. Tính thể tích khối bát diện đều đó. Chứng minh rằng tâm các mặt của hình bát diện đều là các đỉnh của hình lập phương. Tính thể tích khối lập phương này.

1. Hình bát diện đều chính là hai hình chóp tứ giác đều chung đáy ABCD có diện tích đáy mỗi chóp là a^2 (ABCD là hình vuông cạnh a) ASCS' cũng là hình vuông cạnh a nên $SS' = a\sqrt{2}$. Do đó chiều cao của mỗi chóp tứ giác đều là $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Vậy thể tích khối 8 mặt đó là:

$$V_8 = 2.\frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

2. Gọi tâm của 4 mặt bên SAB, SAC, SCD, SDA là M, N, P, Q. Gọi trung điểm của AB, BC, CD, DA là M', N', P', Q'. Áp dụng định lý Talét ta dễ dàng suy ra $MN = NP = PQ = QM = \frac{2}{3}M'N' = \frac{2}{3}\frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Do M'N'P'Q' là hình vuông nên MNPQ là hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. Chứng minh tương tự các tâm M'', N'', P'', Q'' của S'AB, S'BC, S'CD, S'DA cũng sẽ tạo thành hình vuông cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, MNN''M'' cũng vậy suy ra 6 mặt của MNPQ.M''N''P''Q'' đều là hình vuông. Vậy MNPQM''N''P''Q'' là hình lập phương.

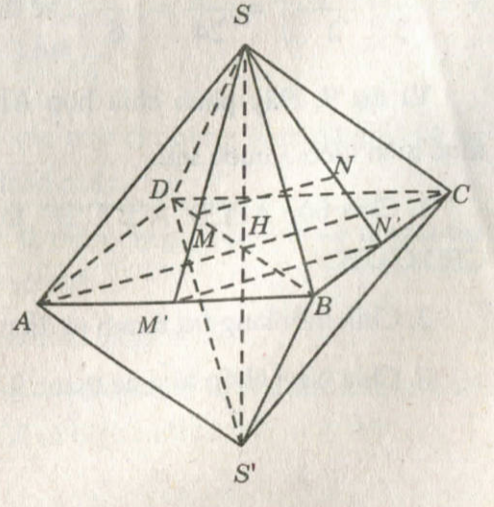
3. Khi đó thể tích của hình lập phương là $V = MN^3 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^3$

$V_6 = \frac{2}{27}a^3\sqrt{2}$ đơn vị thể tích

Tỉ số thể tích hình lập phương và khối 8 mặt đều là:

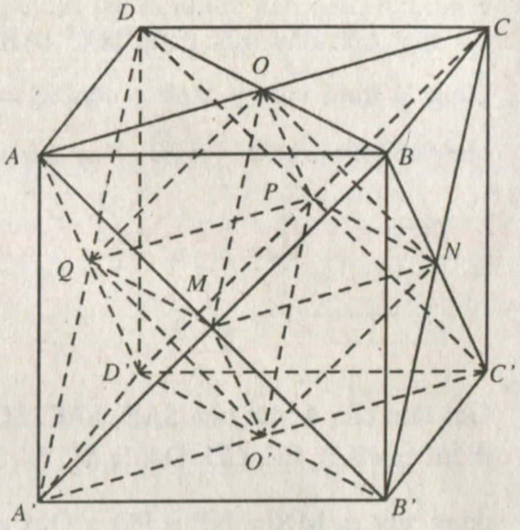
$$\frac{V_6}{V_8} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{27} : \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_6}{V_8} = \frac{2}{9}.$$



Hình 20

Ví dụ 8. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a, bằng gỗ. Gọt khối lập phương để lấy khối 8 mặt đều nội tiếp nó, nghĩa là đỉnh của khối 8 mặt đều là tâm của 6 mặt của khối lập phương. Tính thể tích khối 8 mặt đó. Tính thể tích phần gỗ bỏ đi.



Hình 21

a. Do tính chất của hình lập phương ta dễ dàng chứng minh OM = ON = OP = OQ = O'M = O'N = O'P = O'Q = MN = NP = PQ = QM = OA = $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Vậy 8 mặt của khối OMNPQO' đều là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b. Thể tích hình lập phương là a^3

c. Thể tích khối 8 mặt đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ theo ví dụ 4 sẽ là

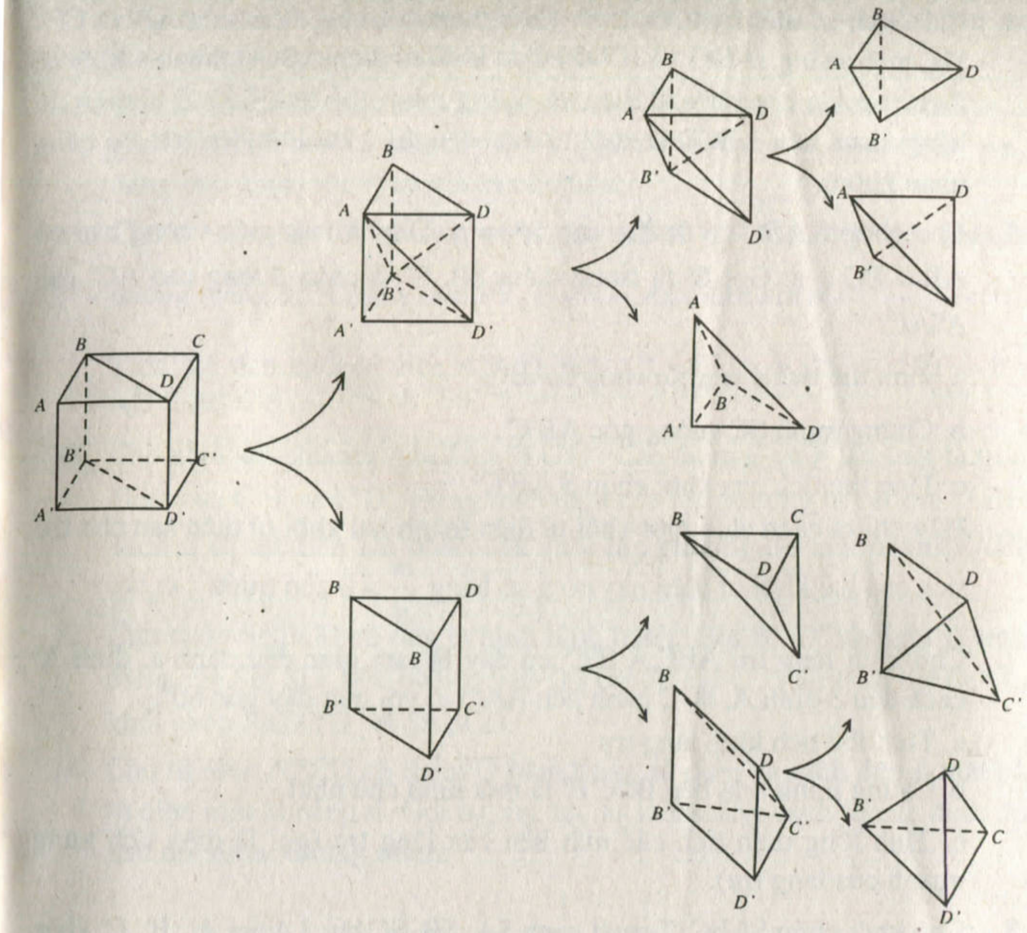
$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{4a^3}{24} = \frac{a^3}{6}$$. Thể tích gỗ bỏ đi là $\frac{5a^3}{6}$.

Ví dụ 9. Hãy phân chia hộp ABCD.A'B'C'D' thành các khối tứ diện, thực hiện theo 3 bước sau:

1. Chia hộp ABCD. A'B'C'D' thành 2 lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' và CBD.C'D'B'.

2. Chia mỗi lăng trụ thành tứ diện và một hình chóp tứ giác.

3. Chia hình chóp tứ giác thành 2 tứ diện. Vậy sẽ có 6 hình tứ diện.



Hình 22

C. BÀI TẬP

1. a. Hãy chứng minh khối đa diện có các mặt là những hình đa giác có số cạnh là lẻ thì tổng số các mặt phải là số chẵn.

   b. Trong khối đa diện nếu mỗi đỉnh là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng số các đỉnh của nó phải là một số chẵn.

2. Chia khối lập phương thành 6 khối tứ diện bằng nhau.

3. Chứng minh tâm của các mặt của tứ diện đều lại là 4 đỉnh của một tứ diện đều. Tìm tỉ số thể tích của 2 khối tứ diện mới và cũ.

4. Cho khối tứ diện ABCD, E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai mặt phẳng (ABF) và (CDE) chia khối tứ diện ABCD thành 4 khối tứ diện. Kể tên các khối tứ diện và chứng minh thể tích 4 khối tứ diện đó bằng nhau, nếu ABCD là khối tứ diện đều thì 4 khối tứ diện trên có bằng nhau không?

5. Cho chóp S.ABC có đường cao SA = a. Đáy là tam giác vuông cân có AB = BC = a. Gọi B′ là trung điểm SB, C′ là chân đường cao AC′ của ΔSAC.

   a. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

   b. Chứng minh SC vuông góc AB′C′.

   c. Tính thê tích của khối chóp S.AB′C′

6. Hãy chỉ ra cách chia một khối tứ diện thành hai khối tứ diện sao cho thể tích của hai khối tứ diện này có tỉ số bằng $\frac{m}{n} > 0$ cho trước

7. Cho khối lăng trụ ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác đều cạnh a, đỉnh A′ cách đều 3 đỉnh A, B, C cạnh bên AA′ tạo với mặt đáy góc 60^0.

   a. Tính thể tích khối lăng trụ.

   b. Chứng minh mặt bên BCC′B′ là một hình chữ nhật.

   c. Tính tổng diện tích các mặt bên của lăng trụ (gọi là diện tích xung quanh của lăng trụ).

8. Cho khối chóp SABC. Trên 3 cạnh SA, SB, SC lấy 3 điểm A′, B′, C′ khác với S. Gọi V là thể tích chóp SABC, V′ là thể tích chóp S′A′B′C′.

   Chứng minh $\frac{V}{V'} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$

9. Cho khối lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB} = 60^\circ$ AC = b. BC′ tạo với (AA′CC′) góc 30°. Tính độ dài AC′ và tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

10. Cho hộp ABCD.A′B′C′D′ có tất cả các cạnh là a, các góc $\widehat{A_1AB} = \widehat{BAD} = \widehat{A_1AD} = \alpha$ $(\alpha < 90^\circ)$. Hãy tính thể tích của hộp.

11. Cho hộp ABCD.A′B′C′D′ có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh là a, b, hai mặt bên (ABB′A′) và (ADD′A′) tạo với đáy ABCD góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích của hộp nếu cạnh bên AA′ là c.

12. Hãy tìm thể tích khối hộp nếu độ dài cạnh bên là a, diện tích hai mặt chéo là S_1 và S_2, góc giữa 2 mặt chéo là α.

13. Cho S.ABCD là chóp đều, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là 2a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là α. Tính thể tích V của khối chóp, với α bằng bao nhiêu thì V có giá trị nhỏ nhất?

14. Cho tứ diện ABCD, khoảng cách giữa AB và CD là a, α là góc giữa hai đường thẳng đó. Chứng minh $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.a.\sin\alpha$.

15. Tính thể tích khối tứ diện ABCD biết AB = CD = a, AC = BD = b và AD = BC = c.

16. Cho khối lập phương ABCD.A′B′C′D′. Các điểm E và F lần lượt là trung điểm của C′B′ và C′D′. Dựng thiết diện của lập phương bị cắt bởi (AEF) Tính tỉ số thể tích hai phần của khối lập phương do mặt phẳng (AEF) cắt ra.

17. Cho chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi B′, D′ lần lượt là trung điểm của SB, SD. Mặt phẳng (AB′D′) cắt SC tại C′. Tìm tỉ số thể tích hai khối chóp SABC′D′ và SABCD.

18. Cho tứ diện ABCD có điểm O nằm trong tứ diện và cách đều 4 mặt của tứ diện một khoảng d. Gọi h_A, h_B, h_C, h_D là khoảng cách từ các đỉnh đến mặt đối diện. Chứng minh:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}$$

19. Cho chóp S.ABC, M là một điểm nằm trong đáy ABC, các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC lần lượt cắt (BCS), (CAS), (ABS) tại A′, B′, C′. Chứng minh $\frac{V_{M.BCS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MA'}{SA}$ và $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC}$ không đổi.

20. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên tại K, L, M, N. Chứng minh $V_{S.ABCD} = V_{S.ACD} = V_{S.ABD} = V_{S.BCD}$.

    và $\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$

21. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, mặt phẳng (α) qua A và vuông góc SC cắt SB, SC, SD ở B′, C′, D′.

a. Chứng minh AB'C'D' có 2 góc đối diện là vuông

b. Chứng minh khi S chạy trên đường thẳng vuông góc với đáy tại A thì (AB'C'D') luôn đi qua một đường thẳng cố định và các điểm A, B, B', C, C', D, D' cũng cách một điểm cố định một khoảng không đổi.

c. Giả sử góc giữa SC và (SAB) là x. Tính thể tích của chóp S.AB'C'D' và S.ABCD biết AB = BC.

22. Cho tứ diện ABCD:

a. Chứng minh nếu chân đường cao H của tứ diện xuất phát từ A trùng với trực tâm tam giác BCD và AB vuông góc AC thì AC vuông góc AD và AD vuông góc với AB.

b. Giả sử BC = CD = DB, AB = AC = AD. H là chân đường vuông góc hạ từ A đến (BCD), J là chân đường vuông góc hạ từ H xuống AD. Đặt AH = h, HJ = d. Tính thể tích tứ diện theo d và h.

c. Chứng minh nếu ΔABC và ΔABD có diện tích bằng nhau thì đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

23. Cho hình chóp đều đáy là đa giác đều n cạnh, cạnh đáy là a.

a. Tính thể tích và diện tích xung quanh nếu góc giữa cạnh bên và đáy là α.

b. Tính thể tích và diện tích xung quanh nếu góc giữa mặt bên và đáy là β.

24. Cho hình chóp cụt đều đáy là đa giác đều n cạnh, cạnh đáy là a, b (a > b).

a. Tính thể tích và diện tích xung quanh chóp cụt nếu góc giữa cạnh bên và đáy là α.

b. Tính thể tích và diện tích xung quanh chóp cụt nếu góc giữa mặt bên và đáy là β.

25. Đáy hình chóp SABCD là hình chữ nhật, có AB = a, AD = b, SA vuông góc đáy và SA = 2a. Lấy $M \in SA$ với AM = x ($0 \leq x \leq 2a$).

a. (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện gì? Tìm diện tích thiết diện ấy.

b. Xác định x để (MBC) chia hình chóp ra hai phần có thể tích bằng nhau.

(ĐH Y Dược Thành phố Hồ Chí Minh, năm học 1996, chương trình phân ban).

26. Cho tứ diện ABCD, chứng minh:

a. Các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm mặt đối diện đồng quy tại một điểm G.

b. Các hình chóp đỉnh G có đáy là các mặt của tứ diện có thể tích bằng nhau.

27. Cho tứ diện SABC có các góc phẳng ở đỉnh S đều vuông.

a. Chứng minh $\sqrt{3}\, S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$.

b. Cho SA = a, SB + SC = k, SB = x. Tính thể tích tứ diện theo a, k, x và xác định SB, SC để thể tích tứ diện SABC lớn nhất. (ĐH Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, năm học 1996).

28. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có tất cả các cạnh bằng a.

a. Tính thể tích của nó.

b. Tính khoảng cách từ tâm đáy đến các mặt bên.

(ĐH Đà Nẵng, khối D, năm 1997)

29. Cho hình chóp OABC với OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một và OA = a, OB = b, OC = c.

a. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng ABC. Chứng minh H là trực tâm tam giác ABC.

b. Cho H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh OH vuông góc mặt phẳng ABC.

c. Tính diện tích tam giác ABC theo a, b, c.

d. Chứng minh: $a^2\,\mathrm{tg}A = b^2\mathrm{tg}B = c^2\mathrm{tg}C$

(ĐH Ngoại Ngữ Hà Nội, 1997, theo phân ban)

30. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′ có A′A = a, AB = b, AD = c. Tính thể tích tứ diện ACB'D' theo a, b, c.

(Học viện Quan hệ quốc tế năm 1997).

31. AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau x, y. Lấy $A \in x$, $B \in y$, AB cố định và AB = d, $M \in x$, $N \in y$, M, N thay đổi và AM = m, BN = n ($m, n \geq 0$). Giả sử có $m^2 + n^2 = k > 0$, k không đổi.

a. Xác định m, n để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

b. Trong trường x vuông y và $mn \neq 0$, hãy xác định m, n theo k và d để thể tích tứ diện ADMN đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó.

(ĐH Quốc gia Hà Nội, năm 1997, khối A)

32. Cho tam giác ABC cân đỉnh A. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng vuông góc với mp (ABC) tại A ($M \neq A$).

a. Tìm quỹ tích trọng tâm G và trực tâm H của tam giác MBC.

b. Gọi O là trực tâm tam giác ABC. Hãy xác định vị trí của M để thể tích tứ diện OHBC đạt giá trị lớn nhất.

(ĐH Quốc gia Hà Nội, năm 1997, khối B).

33. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$.

a. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp theo a.

b. Tính cosin của góc nhị diện $\left[(SAB),(SAD)\right]$.

(ĐH Sư phạm TP Hồ Chí Minh, khối D – E – 2000).

34. Cho hình chóp đều SABCD. Đáy ABCD là hình vuông có cạnh bằng 2a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD). (P) lần lượt cắt SC và SD tại C′ và D′.

a. Tính diện tích của tứ giác ABC′D′.

b. Tính thể tích của hình đa diện ABCDO′C′.

(Đại học Nông nghiệp I – Khối A – 2000).

Chương II

MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

I. MẶT NÓN, HÌNH NÓN, KHỐI NÓN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Sự tạo thành mặt tròn xoay

Trong không gian cho mặt phẳng α, chứa đường thẳng Δ và đường τ. Khi quay mặt phẳng α xung quanh đường thẳng Δ thì tập hợp các điểm của đường τ tạo nên một mặt tròn xoay nhận đường thẳng Δ làm trục. Đường τ sinh ra mặt tròn xoay nên được gọi là đường sinh của mặt tròn xoay.

2. Tính chất của mặt tròn xoay

* Nếu cắt mặt tròn xoay bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Δ thì giao tuyến là một đường tròn có tâm nằm trên trục Δ.

* Mỗi điểm M thuộc mặt tròn xoay đều nằm trên một đường tròn thuộc mặt tròn xoay và có tâm trên trục Δ.

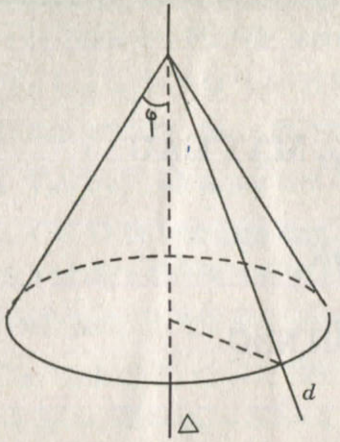
(Cho nên người ta còn nói mặt tròn xoay là tập hợp các đường tròn nằm trên các mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cố định và có tâm nằm trên đường thẳng Δ).

3. Mặt nón tròn xoay

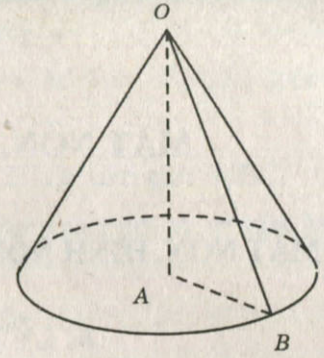
Định nghĩa: Cho 2 đường thẳng d và Δ cắt nhau tại O tạo thành góc φ với $0 < \varphi < 90^0$. Khi quay đường thẳng d xung quanh trục Δ sao cho góc φ không thay đổi thì tạo ra mặt nón tròn xoay (gọi tắt là mặt nón) (h.23).

O gọi là đỉnh của mặt nón và góc ở đỉnh bằng 2φ, d gọi là đường sinh của mặt nón.

4. Hình nón



Hình 23



Hình 24

Cho tam giác vuông OAB vuông ở A

Khi quay tam giác này quanh cạnh OA thì đường gấp khúc OBA tạo thành một hình tròn xoay (còn gọi tắt là hình nón). Hình tròn tâm A do cạnh AB tạo ra trong khi quay gọi là mặt đáy của hình nón.

O gọi là đỉnh của hình nón, độ dài đoạn OA gọi là chiều cao, độ dài đoạn OB gọi là đường sinh của hình nón.

Cạnh OB trong khi quay tạo thành mặt xung quanh của hình nón

5. Khối nón tròn xoay

Phần không gian giới hạn bởi hình nón và cả hình nón gọi là khối nón tròn xoay (gọi tắt là khối nón).

Đỉnh, chiều cao, đường sinh của hình nón cũng là đỉnh, chiều cao, đường sinh của khối nón đó.

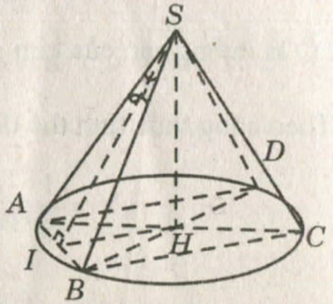
6. Diện tích xung quanh của hình nón, thể tích của khối nón

$S_{xq} = \pi r l$ (S_{xq} là diện tích xung quanh, r là bán kính hình tròn đáy, l là đường sinh).

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (V là thể tích, h là chiều cao, r là bán kính hình tròn đáy).

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Một hình vuông cạnh a nội tiếp trong đáy hình nón. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cạnh hình vuông cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng α. Tìm diện tích xung quanh của hình nón.



Hình 25

Giải

Ta có $S_{xq} = \pi r l$ ở đây r = AH, l = SA

ABCD là hình vuông cạnh a suy ra

$$AC = a\sqrt{2},\ AH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Gọi I là trung điểm của AB suy ra $IA = IB = \frac{a}{2}$ và SI vuông góc AB, (do tam giác SAB là tam giác cân);

$$\widehat{ASI} = \frac{\alpha}{2}$$

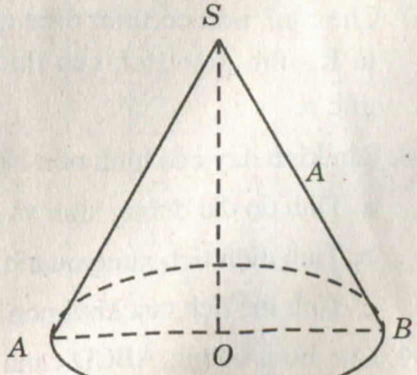
Trong tam giác vuông SIA ta có: $SA = \dfrac{AI}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

Vậy $S_{xq} = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$

Ví dụ 2. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều cạnh a. Tìm diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón.

Giải:

Cắt hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn (O) bằng một mặt phẳng qua trục SO, thiết diện là ΔSAB đều cạnh a (h.26).



Hình 26

Rõ ràng đường sinh SB = l = a, bán kính đáy $r = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

Theo công thức tính diện tích xung quanh hình nón:

$$S_{xq} = \pi r l \text{ suy ra } S_{xq} = \pi\,\frac{a}{2}.a = \frac{\pi}{2}.a^2$$

SO là đường cao của tam giác đều cạnh a, nên $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Theo công thức tính thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ở đây $r = \frac{a}{2}$, $h = SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$

C. BÀI TẬP

35. Trong mặt phẳng (P) cho O cố định. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua O sao cho góc giữa l và mặt phẳng (P) luôn bằng φ không đổi. Chứng minh rằng l luôn nằm trên một mặt tròn xoay xác định.

36. Đường sinh của hình nón có độ dài 5m và tạo với mặt đáy một góc bằng 30^o. Tính diện tích thiết diện qua trục của hình nón ấy.

37. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều, bán kính đáy là R; tính diện tích của thiết diện qua hai đường sinh tạo thành một góc α.

38. Bán kính đáy của hình nón bằng 3m, chiều cao bằng 4m.

    a. Tính độ dài đường sinh và góc tạo bởi đường sinh với mặt đáy.

    b. Tính diện tích xung quanh.

    c. Tính thể tích của khối nón.

39. Cho hình vuông ABCD cạnh a nội tiếp đáy hình nón có đỉnh S sao cho góc $SAB = 60^0$.

    a. Chứng minh rằng SABCD là hình chóp tứ giác đều.

    b. Tính thể tích hình chóp SABCD theo a.

    c. Tính tỉ số thể tích của hình chóp và hình nón.

40. Cho hình chóp tam giác đều SABC cạnh bên nghiêng với đáy góc φ, cạnh đáy AB = a. Một hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn nội tiếp tam giác ABC.

    a. Tính diện tích xung quanh của hình nón theo a và φ.

    b. Tính tỉ số thể tích của khối nón và khối chóp đã cho theo a và φ.

II. MẶT TRỤ, HÌNH TRỤ, KHỐI TRỤ

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

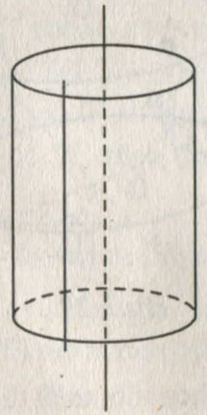
1. Mặt trụ tròn xoay

* ***Định nghĩa:*** Cho hai đường thẳng Δ và ℓ song song với nhau và cách nhau một khoảng r thì mặt tròn xoay sinh ra bởi đường thẳng ℓ quay quanh Δ gọi là mặt trụ tròn xoay (gọi tắt là mặt trụ).

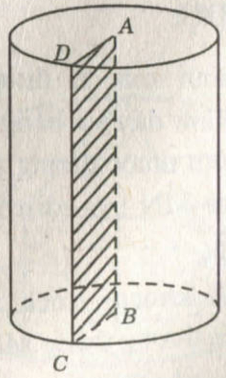
Δ gọi là trục của mặt trụ, ℓ gọi là đường sinh của mặt trụ đó (h.27).

* Cắt mặt trụ bởi một mặt phẳng vuông góc với Δ thì thiết diện là một đường tròn có tâm nằm trên Δ và có bán kính r.

2. Hình trụ



Hình 27



Hình 28

Cho hình chữ nhật ABCD, khi quay hình chữ nhật này quanh cạnh AB thì đường gấp khúc ADCB tạo thành một hình trụ tròn xoay (gọi tắt là hình trụ) (hình 28).

Khi quay cạnh AD và BC sẽ sinh ra hai đường tròn bằng nhau gọi là *hai mặt đáy* của hình trụ.

Khi quay cạnh DC sinh ra một mặt trụ tròn xoay gọi là *mặt xung quanh* của hình trụ.

AD = BC gọi là bán kính đáy của hình trụ.

AB là trục của hình trụ, độ dài đoạn DC là độ dài đường sinh của hình trụ, cũng là chiều cao của hình trụ.

3. Khối trụ tròn xoay

Phần không gian giới hạn bởi hình trụ và cả hình trụ gọi là *khối trụ tròn xoay (gọi tắt là khối trụ)*

Bán kính đáy, đường sinh, chiều cao, mặt xung quanh của hình trụ cũng là bán kính đáy, đường sinh, chiều cao, mặt xung quanh của khối trụ.

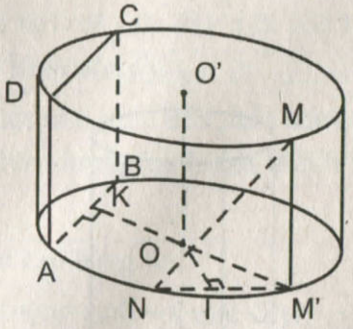
4. Diện tích xung quanh hình trụ, thể tích khối trụ

$S_{xq} = 2\pi rh$ (S_{xq} là diện tích xung quanh, r là bán kính đáy, h là chiều cao của hình trụ)

$V = \pi r^2 h$ (V thể tích khối trụ)

B. VÍ DỤ:

Một hình trụ có đường cao bằng bán kính đáy và bằng a. Lấy M, N là điểm thuộc đường tròn hai đáy sao cho MN tạo với trục hình trụ góc α.



Hình 29

a. Tính khoảng cách từ trục hình trụ đến đường thẳng MN

b. Mặt phẳng (P) song song trục, cắt hình trụ theo một thiết diện là hình vuông. Tính khoảng cách từ trục hình trụ đến mp (P).

c. Mặt phẳng (Q) không song song với trục hình trụ, cắt nó theo một thiết diện là hình vuông. Tính góc tạo bởi trục hình trụ và mp (Q).

Giải

a. Kẻ MM' vuông góc với đáy dưới thì OO' song song MM' nên góc tạo bởi MN và OO' là góc NMM' = α và mp (MNM') vuông góc đáy.

Kẻ OI vuông góc M'N suy ra OI vuông góc (MNM') nếu OI là khoảng cách từ trục đến đường thẳng MN.

Trong tam giác vuông MM'N ta có $\tan\alpha = \dfrac{M'N}{MM'}$

Suy ra $M'N = MM' = MM' \tan\alpha$

$M'N = a \tan\alpha$

Tam giác M'ON cân đỉnh O nên I là trung điểm M'N

Suy ra $NI = \frac{1}{2} M'N = \frac{1}{2} a \tan\alpha$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NOI ta có:

$$OI = \frac{1}{2} a\sqrt{4 - \tan 2\alpha}\,.$$

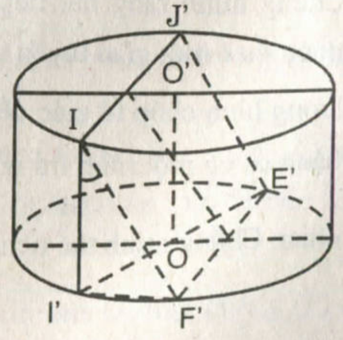
b. Theo đầu bài thì ABCD là hình vuông nên AB = a. Lập luận giống câu a thì OK là khoảng cách từ trục hình trụ đến mp (P), với K là trung điểm AB. OK là đường cao của tam giác đều BAO cạnh a nên $KO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

c. Kẻ II' vuông đáy dưới thì II' song song và bằng O'O, I'F là hình chiếu của IF trên đáy dưới mà IF vuông góc FE (gt) nên I'F vuông góc FE theo định lí ba đường vuông góc:

$\widehat{I'FE} = 1v$ suy ra I'E là đường kính.

Do EF vuông góc IF và I'F nên EF ⊥ mp (II'F) suy ra mp (IJEF) ⊥ mp(II'F).

Kẻ I'K ⊥ IF thì I'K ⊥ mp (IJEF). KI là hình chiếu của II' trên Q nên góc tạo bởi II' và Q là góc $\widehat{I'FE}$ ⇒ nó cũng là góc tạo bởi trục O'O và Q.



Hình 30

Từ hai tam giác vuông II'F và EFI' có cùng cạnh góc vuông I'F, cho:

$$IF^2 - II'^2 = I'E^2 - EF^2 \text{ suy ra } IF^2 - a^2 = 4a^2 - IF^2 \Leftrightarrow IF = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Suy ra $\cos\widehat{I'FE} = \dfrac{II'}{IF} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

C. BÀI TẬP

41. Cho mặt phẳng (P), một điểm A nằm trên (P), một điểm B nằm ngoài (P) sao cho hình chiếu B' của B trên (P) không trùng với A. Một điểm M chạy trong (P) sao cho luôn có $\widehat{ABM} = \widehat{BMB'}$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên một mặt trụ tròn xoay có trục là AB.

42. Một hình trụ có chiều cao bằng bán kính đáy, người ta kẻ trên hai đáy bán kính làm thành một góc 30^0. Tính góc giữa trục của hình trụ và đường thẳng nối hai điểm mút của hai bán kính trên.

43. Chiều cao của hình trụ bằng 2m, bán kính đáy bằng 7m, một hình vuông nội tiếp hình trụ sao cho bốn đỉnh của nó đều nằm trên hai đường tròn đáy, tính cạnh của hình vuông.

44. Chứng minh rằng hai tiếp diện của hình trụ hoặc song song hoặc cắt nhau theo một giao tuyến song song với trục hình trụ.

45. Trong hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy bằng a và góc nhị diện thuộc đáy bằng α, có một hình trụ nội tiếp mà đường cao và bán kính của nó bằng nhau. Chứng minh thể tích hình trụ bằng $\dfrac{\pi a^3 \sin^3\alpha}{16\sqrt{2}\sin^3(\alpha + 45^o)}$.

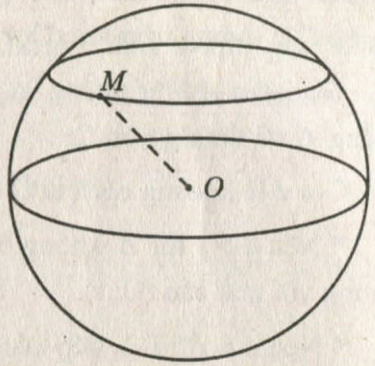
III. MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Mặt cầu

Tập hợp tất cả các điểm M trong không gian cách điểm O một khoảng bằng r (r > 0) gọi là mặt cầu tâm O bán kính r. Kí hiệu là (O; r), có khi viết là (O)

Như vậy $(O; r) = \{M \mid OM = r\}$



Hình 31

2. Điểm nằm trên, nằm trong, nằm ngoài mặt cầu

Cho điểm M và mặt cầu (O; r).

* Nếu OM = r thì M nằm trên mặt cầu

* Nếu OM < r thì M nằm trong mặt cầu

* Nếu OM > r thì M nằm ngoài mặt cầu

3. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu (O; r) và mặt phẳng (P). Gọi h là khoảng cách từ O đến (P) ($OH \perp (P)$, $H \in (P)$ và đặt OH = h)

* Nếu h > r thì (P) không cắt mặt cầu

* Nếu h = r thì (P) và mặt cầu có một điểm chung duy nhất H. Khi đó ta nói (P) tiếp xúc với mặt cầu (O, r) tại H.

Điểm H gọi là tiếp điểm, (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu.

* Nếu h < r thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn tâm H bán kính $r = \sqrt{r^2 - h^2}$.

Trường hợp đặc biệt khi h = 0, khi đó (P) đi qua O, mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (O, r) theo đường tròn tâm O bán kính r. Đường tròn này gọi là đường tròn lớn.

Mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu đó.

4. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu (O; r) và đường thẳng Δ. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và tâm O. Gọi đường tròn C là giao của mặt cầu (O; r) và mặt phẳng (P) dĩ nhiên C là đường tròn lớn (O; r)

Giao của đường thẳng Δ và mặt cầu (O; r) chính là giao của đường thẳng Δ và đường tròn C.

Gọi d là khoảng cách từ O đến Δ, ta có các trường hợp sau:

* Nếu $d > r$ thì Δ không có điểm chung với C suy ra Δ không có điểm chung với mặt cầu (O; r)

* Nếu $d = r$ thì Δ tiếp xúc với C tại H và H là điểm chung duy nhất của mặt cầu và Δ. Khi đó ta nói Δ là tiếp tuyến của mặt cầu, H là tiếp điểm.

* Nếu $d < r$, Δ cắt C tại M và N thì hai điểm này chính là giao điểm của Δ và mặt cầu (O; r).

Đặc biệt nếu Δ đi qua tâm của C và cắt C tại hai điểm A, B thì AB là đường kính của mặt cầu (O; r).

5. Nhận xét:

Qua một điểm M bất kỳ trên mặt cầu có vô số tiếp tuyến của mặt cầu, các tiếp tuyến này đều vuông góc với OM. Các tiếp tuyến này đều thuộc một tiếp diện vuông góc với OM tại M.

Qua một điểm M nằm ngoài mặt cầu (O; r) có vô số tiếp tuyến với mặt cầu đã cho các tiếp tuyến này tạo thành một mặt nón tròn xoay đỉnh M, khi đó độ dài đoạn thẳng nối từ A đến tiếp điểm đều bằng nhau.

6. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

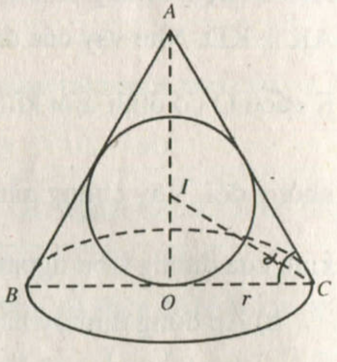
$$\boxed{\begin{gathered} S = 4\pi r^2 \\ V = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{gathered}}$$

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho hình nón có bán kính đáy bằng r, đường sinh tạo với đáy một góc α. Một hình cầu tâm I nằm trong hình nón và mặt cầu tiếp xúc với mặt xung quanh và đáy hình nón.

Tìm diện tích của mặt cầu và thể tích của khối cầu.

Giải:



Hình 32

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân ABC và cắt hình cầu tâm I theo đường tròn tâm I bán kính IO = R tiếp xúc với 3 cạnh của ΔABC.

Hiển nhiên I là giao của các đường phân giác trong của ΔABC.

Trong tam giác vuông OIC, do CI là đường phân giác của góc C nên $\widehat{ICO} = \frac{1}{2}\widehat{C}$ mà góc C là góc tạo bởi đường sinh và đáy nên $\widehat{C} = \alpha \Rightarrow \widehat{ICO} = \frac{\alpha}{2}$, $OC = r$ nên $IO = R = r\tan\frac{\alpha}{2}$.

Theo công thức tính diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$

$$\text{Vậy } S = 4\pi\left(r\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 4\pi r^2\tan^2\frac{\alpha}{2}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(r\tan\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\tan^3\frac{\alpha}{2}$$

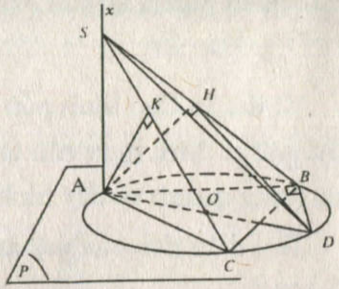
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thuộc mặt phẳng (P) và $Ax \perp (P)$. Lấy S trên Ax. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh các điểm A, B, C, H, K cùng nằm trên một mặt cầu.

b) Tính bán kính mặt cầu biết $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^o$.

Giải

a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ đường kính AD ta có: BD ⊥ AB mà SA ⊥ (P) suy ra (SAB) ⊥ (P), BD ⊂ (P) và BD ⊥ AB ⇒ BD ⊥ (SAB) ⇒ BD ⊥ AH, ta lại có AH ⊥ SB (gt) suy ra AH ⊥ (SBD) ⇒ AH ⊥ HD. Chứng minh tương tự ta có AK ⊥ KD. Như vậy các điểm A, B, C, H, K cách O cố định một khoảng bằng $\frac{AD}{2}$ không đổi. Vậy chúng nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $\frac{AD}{2}$ (AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC).



Hình 33

b) Áp dụng định lý hàm số cosin và hàn số sin vào ΔABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\,.\,AC\cos\widehat{A}$$

$$= 2^2 + 3^2 - 2\,.\,2\,.\,3\cos 60^\circ$$

$$= 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

và $\frac{BC}{\sin A} = AD \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = AD \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

Vậy bán kính hình cầu là: $OA = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

C. BÀI TẬP

46. Tìm thể tích của một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thoi mà góc nhọn bằng α, ngoại tiếp hình cầu có thể tích V.

47. Cho một tứ diện có các cạnh bằng a. Tìm bán kính hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện.

48. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) lấy điểm S bất kỳ, dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B′, C′, D′. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B′, C′, D′ cùng nằm trên một mặt cầu.

49. Trong mp (P) có đường thẳng d cố định và một điểm cố định A ∉ d. Góc $\widehat{xOy} = 1v$ thuộc (P) quay quanh A, Ax và Ay cắt d tại B, C. Cho d’ ⊥ (P) tại A. Lấy S ∈ d′. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

a) Chứng minh các điểm A, B, C, H, K cùng nằm trên một mặt cầu.

b) Tính bán kính mặt cầu biết AB = 2, AC = 3, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

c) Cho ΔABC vuông tại A. Chứng minh mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCKH luôn đi qua một đường tròn cố định khi S chạy trên d′.

d) Tìm quỹ tích tâm I (tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB khi góc vuông $\widehat{xOy}$ quay quanh O). Chứng minh mặt cầu (I) luôn luôn đi qua một đường tròn cố định.

50. Cho tứ diện ABCD với AB = AC = a, BC = b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và $\widehat{BDC} = 90^\circ$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.

51. Cho hai hình chữ nhật ABCD (AC là đường chéo) và ABEF (AE là đường chéo) không cùng nằm trong một mặt phẳng và thỏa mãn các điều kiện AB = a, AD = AF = $a\sqrt{2}$; đường thẳng AC vuông góc với đường thẳng BF. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và BF (H thuộc AC, K thuộc BF).

a) Gọi I là giao điểm của đường thẳng DF với mặt phẳng chứa AC và song song với BF. Tính tỷ số $\frac{DI}{DF}$.

2) Tính độ dài đoạn HK.

3) Tính bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ABHK.

(ĐHSP Hà Nội – Khối A, 2001).

ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn (O; r), đường sinh AB tạo với đáy một góc α.

52. Diện tích xung quanh của hình nón là:

A. $\dfrac{\pi r^2}{\cos\alpha}$ B. $\dfrac{2\pi r^2}{\cos\alpha}$ C. $\dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ D. $\dfrac{2\pi r^2}{\sin\alpha}$

53. Thể tích của khối nón tạo bởi hình nón trên là:

A. $\dfrac{\pi r^3 \tan\alpha}{3}$ B. $\dfrac{\pi r^3}{3\sin\alpha}$ C. $\dfrac{\pi r^3}{3\cos\alpha}$ D. $\dfrac{\pi r^3}{3\cot g\alpha}$

54. Một hình trụ có bán kính đáy là r, chiều cao là h.

Diện tích xung quanh của hình nón trên là:

A. πrh B. $\dfrac{1}{2}\pi rh$ C. $3\pi rh$ D. $2\pi rh$

55. Thể tích khối trụ cho bởi hình trụ ở câu 54 bằng:

A. $\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ B. πr^2h C. $2\pi r^2h$ D. $\dfrac{1}{2}\pi r^2h$

56. Một hình trụ có bán kính bằng a, chiều cao bằng b. Một mặt phẳng song song với trục cách trục một khoảng là c cắt hình trụ theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

A. $b\sqrt{c^2 - a^2}$ B. ab C. bc D. $2b\sqrt{a^2 - c^2}$

II. BÀI TẬP

57. Đáy hình chóp SABCD là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng qua A vuông góc SC, cắt SB, SC, SD tại B′, C′, D′.

a) Chứng minh tứ giác AB′C′D′ có hai góc đối diện là góc vuông.

b) S chạy trên Ax ⊥ đáy tại A. Chứng minh mp AB'C'D' luôn đi qua một đường thẳng cố định và bảy điểm A, B, B', C, C', D, D' cùng thuộc một mặt cầu cố định.

c) Gọi α < 1v là góc tạo bởi SC và mp (SAB). Cho ABCD là hình vuông, hãy tính tỉ số thể tích giữa hai khối chóp SAB'C'D' và SABCD.

58. Cho hình chóp đều S.ABCD có các cạnh bên bằng a và mặt chéo SAC là tam giác đều.

a) Tìm tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b) Qua A dựng mặt phẳng (α) vuông góc với SC. Tính dện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp.

59. Một hình cầu bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng (P). Một hình nón có đáy nằm trên (P) có chiều cao h và bán kính cùng là R, (h < 2R),

Người ta cắt hai hình đó bằng mặt phẳng (Q) song song với (P) được hai thiết diện và gọi x là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) (x < 2R, x < h). Hãy tính tổng diện tích của hai thiết diện đó theo R, h và x.

Biểu thức ấy còn thích hợp cho trường hợp h < x < 2R, nếu ta kéo dài các đường sinh của hình nón để chúng cắt mặt phẳng (Q).

60. Cho tứ diện ABCD có $AB = BC = CA = AD = BD = a\sqrt{2}$, CD = 2a.

a) Chứng minh AB ⊥ CD. Xác định đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính thể tích tứ diện ABCD.

c) Xác định tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

d) H là hình chiếu vuông góc của I trên mp ABC. Chứng minh H là trực tâm ΔABC.

(Trích đề thi vào trường ĐH Sư phạm Quy Nhơn năm 1979, không phân ban).

61. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng $2\sqrt{6}$ và đường cao SO = 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB.

Tính thể tích hình chóp SAMN và bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

(Trích đề thi vào ĐH Kinh tế quốc dân, 1979).

62. Cho hình trụ có các đáy là hình tròn tâm O và tâm O′, bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a.

Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O′ lấy điểm B sao cho AB = 2a.

Tính thể tích khối tứ diện OO′AB.

(Trích đề thi Đại học – Khối A – 2006).

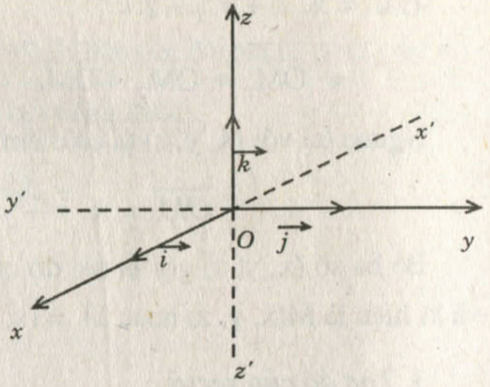
Chương III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Toạ độ của điểm và của vectơ



Hình 34

1. Hệ toạ độ: Trong không gian có ba trục toạ độ vuông góc với nhau đôi một và có định hướng

Ba trục như vậy được gọi là hệ toạ độ vuông góc trong không gian

Điểm O gọi là gốc toạ độ

– Trục hoành, định hướng dương x'Ox, có vectơ đơn vị

$$\vec{i} = (1; 0; 0)$$

– Trục tung, định hướng dương y'Oy, có vectơ đơn vị

$$\vec{j} = (0; 1; 0)$$

– Trục cao, định hướng dương z'Oz, có vectơ đơn vị

$$\vec{k} = (0; 0; 1)$$

– Các mặt phẳng xOy, yOx, xOz đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.

Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên trục, mà các trục vuông góc nhau đôi một, nên ta có: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

và $\vec{i}.\vec{j} = 0$; $\vec{i}.\vec{k} = 0$; $\vec{j}.\vec{k} = 0$

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz còn được gọi là không gian Oxyz

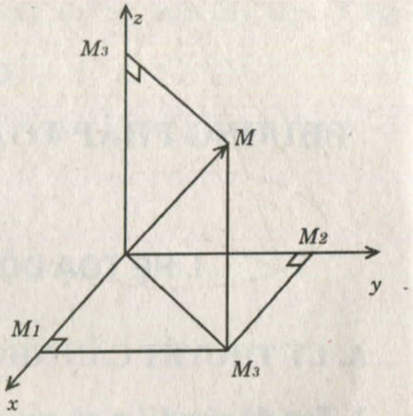
2. Toạ độ một điểm

Trong không gian Oxyz cho một điểm M tuỳ ý, mỗi điểm M hoàn toàn xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OM}$

Vì 3 vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là 3 vectơ không đồng phẳng nên có bộ 3 số duy nhất (x, y, z) sao cho:

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$= \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$$



Hình 35

Ngược lại với (x, y, z) ta có điểm M duy nhất trong không gian thoả mãn

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Bộ ba số (x, y, z) gọi là toạ độ của điểm M đối với hệ trục Oxyz đã cho và kí hiệu là M(x, y, z) hoặc M = (x, y, z)

3. Toạ độ của vectơ

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$, ta luôn có:

$$\vec{u} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Bộ ba số (a_1, a_2, a_3) xác định duy nhất và gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$, kí hiệu là $\vec{u}$ (a_1, a_2, a_3)

2. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

1. Định lí. Trong không gian Oxyz cho các véc tơ $\vec{a}$ (a_1; a_2; a_3)

$\vec{b}$ (b_1; b_2; b_3) khi đó

a) $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3)$

b) $k.\vec{a} = (ka_1;\ ka_2;\ ka_3) = k(a_1;\ a_2;\ a_3)$ (k là số thực)

2. Hệ quả

a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$.

b) $\vec{0} = (0; 0; 0)$.

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ có một số k: $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2$, $a_3 = kb_3$.

d) Trong không gian Oxyz có A(a_1; a_2; a_3) và B(b_1; b_2; b_3) thì $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1;\ b_2 - a_2;\ b_3 - a_3)$.

3. Tích vô hướng

1) Biểu thức toạ độ

Định lí. Trong không gian Oxyz tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ (a_1; a_2; a_3) và $\vec{d}$ (b_1; b_2; b_3) là ~~một số~~ được xác định bởi công thức:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

2) Ứng dụng

* Độ dài của vectơ

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

* Khoảng cách giữa hai điểm A A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; Z_B) là $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

* Gọi φ là góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

4. Tích có hướng của hai vectơ (hay tích vectơ)

1) Định nghĩa: Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3) và $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) là một vectơ được kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ hay $\vec{a} \wedge \vec{b}$ và có toạ độ được xác định như sau:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

2) Tính chất

$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b}$

$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$ và $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$ ($[\vec{a}, \vec{b}].\vec{a} = 0$; $[\vec{a}, \vec{b}].\vec{b} = 0$)

$\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b})$

3) Áp dụng

1. Tích diện tích của hình bình hành và thể tích khối hộp

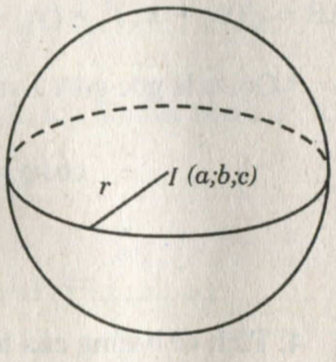
- ABCD là hình bình hành $S_{ABCD} = AB.AD\sin\widehat{A}$

  $= \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]\right|$
- ABCD.A'B'C'D' là hình hộp
- $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AA}\right|$

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$

Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} \neq 0$

5. Phương trình mặt cầu



Hình 36

*** Định lí:** Trong không gian Oxyz, mặt cầu (s) tâm I(a;b;c) và bán kính r có phương trình:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Nhận xét:

Phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với:

$A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A;-B;-C)$ và $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1

Cho tứ diện ABCD:

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

b) Gọi M là điểm chia đường trung tuyến AA_1 của mặt phẳng ABC theo tỉ số 3: 7 ($\frac{MA}{MA_1} = \frac{3}{7}$). Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DC}$$

Giải:

a) $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$

b) *Cách 1.* $\frac{MA}{MA_1} = \frac{3}{7} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MA_1}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DA}$

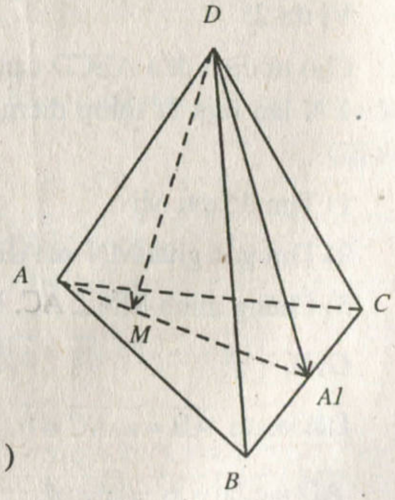
$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{AM}$

Nên suy ra $\overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DA} = \frac{3}{7}(\overrightarrow{DA_1} - \overrightarrow{AM})$

$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{10}\overrightarrow{DA_1}$

Mà $\overrightarrow{DA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

Do đó $\overrightarrow{DM} = \frac{7}{10}\overrightarrow{DA} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{20}\overrightarrow{DC}$.



Hình 37

Cánh 2: Biến đổi vế phải:

$$\frac{7}{10}\overrightarrow{DA}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DB}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DC}$$

$$=\frac{7}{10}(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA})+\frac{3}{20}(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB})+\frac{3}{20}(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC})$$

$$=\frac{7}{10}\overrightarrow{DM}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DM}+\frac{3}{20}\overrightarrow{DM}+\frac{7}{10}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{20}\overrightarrow{MB}+\frac{3}{20}\overrightarrow{MC}$$

$$=\overrightarrow{DM}+\frac{7}{10}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{20}\underbrace{(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})}_{2\overrightarrow{MA_1}}$$

$$=\overrightarrow{DM}+\frac{7}{10}\underbrace{\left(\overrightarrow{MA}+\frac{3}{10}\overrightarrow{MA_1}\right)}_{\vec{0}}$$

VP = VT đó là điều phải chứng minh.

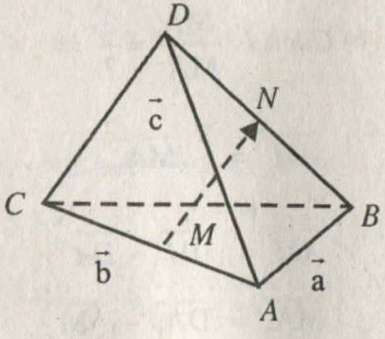
Ví dụ 2:

Cho tứ diện đều ABCD cạnh d, M và N lần lượt là trung điểm AC và BD.

1) Tìm độ dài MN.

2) Tìm góc giữa MN và AB.

3) Chứng minh $MN \perp AC$, $MN \perp BD$.



Hình 38

Giải.

Đặt vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$,

$\overrightarrow{AD}=\vec{c}, |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=$ d.

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{c}.\vec{a}=\vec{b}.\vec{c}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos 60^0=\frac{1}{2}d^2.$$

1) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$$

$$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$\overrightarrow{MN}^2=MN^2=\frac{1}{4}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2=\frac{1}{4}(\vec{a}^2+\vec{b}+\vec{c}+2(-\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}-\vec{b}\,\vec{c})$$

$$=\frac{1}{2}d^2 \Rightarrow MN=\frac{d\sqrt{2}}{2}$$

2) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{a}^2-\vec{b}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{a})=\frac{d^2}{2}$, còn

$|\overrightarrow{MN}|=\frac{d\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{AB}|=d$. Theo công thức ta có:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{AB}|\cos(\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AB})=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AB})=45^o.$$

3) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}^2+\vec{c}.\vec{b})=0.$

$\Rightarrow MN \perp AC.$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\vec{c}+\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})-b(\vec{c}-\vec{a})\right]$$

$$=\frac{1}{2}(c^2-a^2-\vec{b}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a})=0$$

$\Rightarrow MN \perp BD.$

Ví dụ 3.

Tìm toạ độ hình chiếu của điểm A(1; −3; −5) trên:

1) mp Oxy; 2) mp Oxz 3) mp Oyz;

4) Trục hoành; 5) Trục tung 6) Trục cao.

Giải:

1) Trên mp Oxy thì độ cao z = 0 nên toạ độ hình chiếu của điểm A là $A_1(1; -3; 0)$.

2) Trên mp Oxz thì tung độ y = 0 nên toạ độ hình chiếu của điểm A là $A_2(1; 0; -5)$.

3) Trên mp Oyz thì hoành độ x = 0 nên toạ độ hình chiếu của điểm A là $A_3(0; -3; -5)$.

4) Trên trục hoành Ox thì tung độ y = 0, độ cao z = 0 nên toạ độ hình chiếu của A là $A_4(1; 0; 0)$.

5) Trên trục tung Oy thì hoành độ x = 0, độ cao z = 0 nên toạ độ hình chiếu của A là $A_5(0; -3; 0)$.

6) Trên trục cao Oz thì hoành độ x = 0, tung độ y = 0 nên toạ độ hình chiếu của A là $A_6(0; 0; -5)$.

Ví dụ 4: Cho A(–3; 2; –1). Tìm toạ độ điểm đối xứng của A qua gốc toạ độ, qua các trục toạ độ, qua các mặt phẳng toạ độ.

Giải: Qua gốc toạ độ: toạ độ điểm đối xứng của A là: (3; –2; 1).

Qua trục hoành $x'Ox$: toạ độ điểm đối xứng của A là: (–3; 2; –1).

Qua trục tung $y'Oy$: toạ độ điểm đối xứng của A là: (3; 2; 1).

Qua trục cao $z'Oz$: Toạ độ điểm đối xứng của A là: (3; –2; –1).

Qua mặt phẳng Oxy: toạ độ điểm đối xứng của A là: (–3; 2; 1).

Qua mp Oyz: toạ độ điểm đối xứng của A là: (3; 2; –1).

Qua mp Oxz: toạ độ điểm đối xứng của A là: (–3; –2; –1).

Ví dụ 5:

Cho $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -1)$. Tìm toạ độ điểm A, biết B(1; –1; 2).

Giải:

Gọi A(x;y;z) ta có: $\overrightarrow{AB} = (1-x; -1-y; 2-z)$.

Suy ra $\begin{cases} 2 = 1 - x \\ -3 = -1 - y \\ -1 = 2 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 2; 3)$

Ví dụ 6:

Cho $\vec{a} = (3; -1; 5)$ và $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Tìm $\vec{c}$ thoả mãn các điều kiện sau: $\vec{c} \perp Oz$, $\vec{c}\vec{a} = 9$, $\vec{c}\vec{b} = -4$.

Giải: Gọi $\vec{c} = (x, y, z)$. Vì $\vec{c} \perp Oz \Leftrightarrow \vec{c}\vec{k} = 0 \Leftrightarrow x \,.\, 0 + y \,.\, 0 + z \,.\, 1 = 0$

$\Rightarrow z = 0$ vì $\vec{c}\,\vec{a} = 9 \Leftrightarrow 3x - y = 9$ Vì $\vec{c}\vec{c} = 4 \Leftrightarrow x + 2y = -4$

Giải hệ: $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = (2; -3; 0)$

Ví dụ 7.

Cho tứ diện ABCD có A(1; –2; –1), B(–5; 10; –1), C(4; 1; 11), D(–8; –2; 2). Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Giải:

Gọi I(x; y; z) là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, thì ta phải có:

$$IA = IB = IC = ID$$

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}, |\overrightarrow{IA}|, |\overrightarrow{IB}|, |\overrightarrow{IC}|, |\overrightarrow{ID}|, \overrightarrow{ID}$$

$$\overrightarrow{IA} = (1-x; -2-y; -1-z)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IA}| = \sqrt{(1-x)^2 + (2+y)^2 + (1+z)^2}$$

$$\overrightarrow{IB} = (-5-x; 10-y; -1-z)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IB}| = \sqrt{(5+x)^2 + (10-y)^2 + (1+z)^2}$$

$$\overrightarrow{IC} = (4-x; 1-y; 11-z)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{IC}| = \sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2 + (11-z)^2}$$

$$\overrightarrow{ID} = (-8-x; -2-y; 2-z)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{ID}\right| = \sqrt{(8+x)^2+(2+y)^2+(2-z)^2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2+(2+y)^2+(1+z)^2 = (5+x)^2+(10-y)^2+(1+z)^2 \\ (1-x)^2+(2+y)^2+(1+z)^2 = (4+x)^2+(1-y)^2+(11-z)^2 \\ (1-x)^2+(2+y)^2+(1+z)^2 = (8+x)^2+(2+y)^2+(2-z)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+10=0 \\ x+y+4z-22=0 \\ 3x-z+11=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow I(-2;\ 4;\ 5)$$

Khoảng cách IA = $\left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{(1-x)^2+(2+y)^2+(1+z)^2} = 9$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm I(−2;4;5) và có bán kính r = IA = 9

Vậy phương trình mặt cầu là:

$$(x+2)^2+(y-4)^2+(y-5)^2 = 81$$

Ví dụ 8

Cho $\vec{a} = (3,;2;2)$ và $\vec{b} = (18;-22;-5)$. Tìm $\vec{c}$ biết $|\vec{c}| = 14, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$ và $\vec{c}$ tạo với trục tung góc tù.

Giải

Gọi $\vec{c} = (x; y; z)$

Vì: $\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{ac} = 0 \Leftrightarrow 3x+2y+2z = 0$

$\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{bc} = 0 \Leftrightarrow 18x-22y-5z = 0$

$|\vec{c}| = 14 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 14^2$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3x+2y+2z=0 \\ 18x-22y-5z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y \\ z=-2y \\ y=\pm 6 \end{cases}$

Vì $\vec{c}$ tạo với trục tung góc tù nên $\vec{c}.\vec{j} < 0 \Leftrightarrow y < 0$ nên chọn $y = -6$

Đáp số: $\vec{c} = (-4; -6; 12)$

Ví dụ 9.

Cho các điểm A(3;0;1), B(−1;4;1), C(5;2;3), D(0; −5;4).

Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D là 4 đỉnh của hình tứ diện.

Tính $\left|\overrightarrow{AO}\right|$ (O là trọng tâm của mặt BCD của hình tứ diện).

Giải: a. Nếu bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện thì ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

$\overrightarrow{AB} = (-4;4;1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;2;2) = 2(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3;-5;3)$

Cách 1: Xét biểu thức $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}].\overrightarrow{AB}$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4.8 - 4.6 - 2 = -58 \neq 0 \text{ (đpcm)}$$

Cách 2. Ta không tìm được cặp số x, y thoả mãn $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$, nghĩa là hệ sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} -4 = x-3y \\ 4 = x-5y \\ 1 = x+3y \end{cases} \Rightarrow \text{hệ này vô nghiệm}$$

b. Gọi O(x, y, z) ta có:

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} \\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} \\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} \\ \hline 3\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \end{array}$$

Vì O là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}(-5;1;5)$

$$\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{51}}{3}$$

C. BÀI TẬP

63. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O sao cho:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Chứng minh điểm O là điểm duy nhất.

64. Cho tứ diện ABCD. Gọi A', B', C', D' là các điểm theo thứ tự chia các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA theo tỷ số k:

$$\frac{\overrightarrow{A'A}}{\overrightarrow{A'B}} = \frac{\overrightarrow{B'B}}{\overrightarrow{B'C}} = \frac{\overrightarrow{C'C}}{\overrightarrow{C'D}} = \frac{\overrightarrow{D'D}}{\overrightarrow{D'A}} = k$$

1. CMR với mọi điểm O bất kỳ trong không gian, ta luôn có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$$

2. Với giá trị nào của k thì bốn điểm A',B',C',D' đồng phẳng?

65. Cho $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3}, \left|\vec{b}\right| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$. Tính góc tạo bởi tổng và hiệu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$.

66. Tam giác ABC có toạ độ các đỉnh A(3; −1;6); B(−1;7; −2), C(1; −3;2). Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

67. Toạ độ trung điểm các cạnh của tam giác ABC là (1;3;2), (0;2;0), (2; −2; 4). Tìm toạ độ của các đỉnh tam giác ABC.

68. Tìm trên trục hoành một điểm cách đều hai điểm A(1; −3;7) và B(5;7;− −5).

69. ΔABC có A(1;2; −1), B(2; −1;3), C(−4;7;5). Tìm độ dài đường phân giác trong BD.

70. ΔABC có A(−4; −1;2), B(3;5; −10). Tìm toạ độ đỉnh C biết trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mpOxz.

71. ΔABC có A(6;2;3), gốc toạ độ là trung điểm cạnh AC. Trọng tâm G của ΔABC thuộc trục tung. Tìm toạ độ B, C.

72. ΔABC có A(−1;2;3), trọng tâm G trùng với gốc toạ độ, $B \in Ox$, $C \in$ mpOyz. Tìm toạ độ B, C.

73. Tìm thể tích tứ diện ABCD biết toạ độ các đỉnh A(2; −1;1), B(5;5;4), C(3;2; −1), D(4;1;3).

74. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, biết A(−1,0,1), B(2;1;2), D(1;1;2), C′ (4,−5;1).

a) Tìm toạ độ các điểm còn lại của hình hộp.

b) Tìm thể tích hình hộp trên.

75. Cho lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông AB = AC = a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn AA_1 và BC_1. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AA_1 và BC_1. Tính $V_{MA_1BC_1}$.

76. Trong không gian toạ độ Oxyz cho O(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; 1; 0), O' (0,0,a) là bốn đỉnh của hình hộp chữ nhật OBCD.O'B'C'D'.

Tìm a để $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{O'C}$.

(Trích đề thi ĐHXD, 1999).

77. Trong không gian toạ độ Oxyz cho hình tứ diện ABCD, biết toạ độ các đỉnh A(2; 3; 1), B(4; 1; −2), C(6; 3; 7), D(−5; −4; 8).

Tính độ dài đường cao của tứ diện xuất phát từ A.

(Trích đề thi ĐH Dược, 1999).

II. MẶT PHẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

* Vectơ pháp tuyến: Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Định lý: Trong không gian Oxyz nếu mặt phẳng (α) có cặp vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ $(a_1;\ a_2;\ a_3)$ và $\vec{b}$ $(b_1;\ b_2;\ b_3)$ thì (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ có toạ độ $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} a_2 a_3 \\ b_2 b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}\right)$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2;\ a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Như vậy $\vec{n} = \left[\vec{a}\ ,\ \vec{b}\right]$

Định nghĩa: Phương trình có dạng Ax + By + Cz + D = 0 trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0 ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

* **Nhận xét**

* Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là Ax + By + Cz + D = 0 thì vectơ pháp tuyến của nó là $\vec{n}$ (A,B,C)

* Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nhận vectơ $\vec{n}$ (A,B,C) $\neq \vec{0}$ làm vectơ pháp tuyến là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

* **Các trường hợp riêng**

Trong không gian Oxyz cho (α): Ax + By + Cz + D = 0 (1)

* Nếu D = 0 thì (α) đi qua gốc toạ độ và ngược lại.

* Nếu trong phương trình (1) không có mặt x(A = 0) thì mặt phẳng tương ứng sẽ song song hoặc chứa trục Ox.

Tương tự với y và z.

* Nếu phương trình mặt phẳng có dạng Cz + D = 0

Không có mặt x và y (A = 0, B = 0) thì mặt phẳng đó song song hoặc trùng với mặt phẳng Oxy. Tương tự mặt phẳng Ax + D = 0 song song hoặc trùng với mặt phẳng Oyz, mặt phẳng By + D = 0 song song hoặc trùng với mặt phẳng Oxz

* Nếu A,B,C,D khác 0, bằng cách đặt $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ ta có thể đưa (1) về dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (2)$

Khi đó mặt phẳng (α) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm: (a;0;0); (0;b;0); (0;0;c).

Phương trình (2) là phương trình của mặt phẳng theo đoạn chắn.

2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$$(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

1. $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \neq \phi \Leftrightarrow A_1{:}B_1{:}C_1 \neq A_2{:}B_2{:}C_2$

2. (α_1) song song (α_2) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

3. $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

ngoài ra $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

3. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

* Cho mặt phẳng (α):Ax + By + Cz + D = 0 và $M_0(x_0; y_0; z_0)$, khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng α, được tính theo công thức:

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

* Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

B. VÍ DỤ

Ví dụ 1: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm (2;–1; –1) và vuông góc với trục cao.

Giải: Mặt phẳng phải tìm vuông góc với trục cao nên nhận vectơ $\vec{k} = (0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng phải tìm là:

$0(x-2)+0(y+1)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow z+1=0.$

Ví dụ 2:

Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm

M(3; –1; 2); N(4; –1; –1); Q(2; 0; 2)

Giải:

Vectơ pháp tuyến của mp (MNQ) là:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-3 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right) \Rightarrow \vec{n} = (3;3;1)$$

Phương trình mp (MNQ): $3x+3y+z+D=0$

Mp đi qua Q(2; 0; 2) suy ra $D = -(3.2+1.2) = -8$

Vậy pt mp (MNQ): $3x+3y+z-8=0$

Ví dụ 3:

Trong không gian Oxyz cho điểm A(–1; 2; 3) và các mặt phẳng (P): $x-2=0$, (Q): $y-z-1=0$

Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua điểm A và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q).

(Trích đề thi vào ĐH Luật Hà Nội, 1999)

Giải: Vectơ pháp tuyến của (P): $\overrightarrow{n_p} = (1;0;0)$

Vectơ pháp tuyến của (Q): $\overrightarrow{n_q} = (1;1;-1)$

Mặt phẳng (R) vuông góc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên nhận hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng này làm cặp vectơ chỉ phương. Vậy vectơ pháp của mp (R) là:

$$\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)$$

$$= (0;1;1)$$

Mặt phẳng (R) đi qua A(–1;2;3) nên phương trình mặt phẳng (R) là:

$$0(x+1)+(y-2)+(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow y+z-5=0$$

Ví dụ 4:

Trong không gian với hệ trục toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(2; –1; 6); B(–3; –1; –4); C(5; –1; 0), và D(1; 2; 1).

1. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông. Tính bán kính và đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2. Tính thể tích của tứ diện ABCD

(Trích đề thi ĐH Thuỷ sản, 1999)

Giải:

1. $\overrightarrow{AB} = (-5;0;-10)$; $\overrightarrow{CA} = (-3;0;6)$; $\overrightarrow{CB} = (8;0;4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = (-3).8+0.0+6.4=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ nên ΔABC vuông tại C.

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{(-3)^2+0^2+6^2} = 3\sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{8^2+0^2+4^2} = 4\sqrt{5}, \left|\overrightarrow{AB}\right| = 5\sqrt{5}$

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30$ (đvdt). Gọi p là nửa chu vi ΔABC và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p}$$

$$p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{(3 + 4 + 5)}{2}\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

Vậy $r = \dfrac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

3. Mặt phẳng (ABC) có cặp vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{CA} = (-3;0;6) = 3(-1;0;2)$$

$$\overrightarrow{CB} = (8;0;4) = 4(2;0;1)$$

Nên vectơ pháp tuyến của mặt phẳng(ABC) là:

$$\vec{n}_{ABC} = \left(\begin{vmatrix}0 & 2\\0 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$= (0\ ;\ 5\ ;\ 0) = 5(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$$

Vậy mp(ABC) có phương trình y + 1 = 0

Khoảng cách từ D đến mp (ABC) là:

$$d(D, (ABC)) = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 3$$

Thể tích tứ diện DABC là:

$$V = \frac{1}{3}h.\ S_{ABC} = \frac{1}{3}3.30 = 30(\text{đvtt})$$

Ví dụ 5:

Tìm một điểm trên trục cao cách đều điểm A(1; –2;0) và mp (P): 3x – 2y + 6z – 9 = 0.

Giải:

Gọi M ∈ Oz có toạ độ M(0; 0; z_0). Ta có:

$$\overrightarrow{MA} = (1; -2; -z_0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-z_0)^2}$$

Khoảng cách từ điểm M đến mp (P) là:

$$\frac{|6z_0 - 9|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}}$$

Theo đầu bài, ta có: $\sqrt{5 + z_0^2} = \dfrac{|6z_0 - 9|}{7}$

$$\Leftrightarrow 49(5 + z_0) = (6z_0 - 9)^2$$

$$\Leftrightarrow z_0^2 + 46z_0 + 88 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_o = -2\\ z_o = -44\end{array}\right.$$

Đáp số:

$M_1(0;0;-2)$ và $M_2\ (0;0;-44)$

Ví dụ 6:

Tìm tập hợp những điểm M(x,y,z) cách mp (P):

4x – 4y – 2z + 3 = 0 một khoảng bằng 2.

Giải:

Khoảng cách từ M đến mp (P) được tính theo công thức:

$$2 = \frac{|4x - 4y - 2z + 3|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} \Leftrightarrow \pm 12 = 4x - 4y - 2z + 3$$

Vậy tập hợp các điểm M gồm hai mặt phẳng:

4x – 4y – 2z – 9 = 0 và 4x – 4y – 2z + 15 = 0

C. BÀI TẬP

78. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm (3;–2.–7) và song song mp 2x – 3z + 5 = 0.
79. Viết phương trình mặt phẳng qua hai điểm A(1;–1;–2) và B(3;1;1) và vuông góc với mp (P): x – 2y + 3z –5 = 0.
80. Viết phương trình mặt phẳng qua trục tung và điểm A(1;4;–3).
81. Viết phương trình mặt phẳng qua hai điểm A(7;2;–3), B(5;6;–4) và song song với trục hoành.

82. Tìm diện tích tam giác do mp (P): $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ cắt mp Oxy.

83. Tìm thể tích tứ diện do mp(P): $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ cắt các mặt phẳng toạ độ.

84. Tìm trên trục tung một điểm cách mp: $x + 2y - 2z - 2 = 0$ một khoảng bằng 4.

85. Tìm trên trục hoành một điểm cách đều hai mp:

(P): $12x - 16y + 15z + 1 = 0$ và (Q): $2x + 2y - z - 1 = 0$.

86. Viết pt mp cách đều hai mp: (P) $3x + 2y - z + 3 = 0$ và (Q) $3x + 2y - z - 1 = 0$

87. Viết PT mp phân giác của góc nhị diện tạo bởi hai mp:

$$x - 3y + 2z - 5 = 0 \text{ và } 3x - 2y - z + 3 = 0$$

88. Xét xem điểm A(2;–1;1) và gốc toạ độ O có nằm cùng phía, hay khác phía đối với mp (P), mp(Q).

(P): $3x - 2y + 2z - 7 = 0$

(Q): $5x - 3y + z - 18 = 0$

89. Xét xem điểm A(2; –1; 3) và gốc toạ độ O cùng nằm trong góc của nhị diện (P; Q) hay nằm trong hai góc kề nhau của nhị diện này?

1 (P): $2x - y + 3z - 5 = 0$ 2. (P): $2x + 3y - 5z - 15 = 0$

(Q): $3x + 2y - z + 3 = 0$ (Q): $5x - y - 3z - 7 = 0$

90. Viết PT mp phân giác của góc nhị diện (P; Q) biết P:

$2x - 14y + 6z - 1 = 0$, Q : $3x + 5y - 5z + 3 = 0$ và gốc toạ độ thuộc góc nhị diện có mp phân giác.

91. Tìm m để hai mp có PT: $3x - 5y + mz - 3 = 0$ và $x + 3y + 2z + 5 = 0$ vuông góc với nhau.

92. Trong không gian Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0;–3;0), B(4;0;0); C(0;3;0); B_1(4;0;4).

a) Tìm toạ độ các đỉnh A_1 và C_1. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1).

b) Gọi M là trung điểm của A_1B_1 .Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC_1.

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Ta đã biết giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau là một đường thẳng. Vậy trong không gian Oxyz ta xem đường thẳng (d) là giao của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (α’) với:

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$\text{Do đó (d): } \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0, A'^2 + B'^2 + C'^2 \neq 0 \text{ và } A : B : C \neq A' : B' : C' \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình (1) là phương trình tổng quát của đường thẳng.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

- **Định lý:** Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ đi qua điểm M_0 (x_0; y_0; z_0) và nhận vectơ $\vec{a}$ (a; b; c) ≠ 0 làm vectơ chỉ phương. Điều kiện cần và đủ để điểm M (x; y; z) nằm trên Δ là có một số t sao cho:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ trong đó } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \quad (2)$$

- **Định nghĩa:** Hệ phương trình (2) là phương trình tham số của đường thẳng Δ, trong đó t là tham số.

Khi đó Δ đi qua điểm (x_0; y_0; z_0) và vectơ chỉ phương là $\vec{a}$ (a, b, c)

3. Phương trình chính tắc của đường thẳng

Từ (2) và nếu a, b, c đều khác 0, khử t ở các phương trình trên ta có:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad (3)$$

Định nghĩa: Phương trình (3) với a, b, c ≠ 0 được gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

và mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0

Để tìm số giao điểm của Δ và (α) ta giải hệ phương trình gồm các phương trình của Δ và (α) và cho ta phương trình

$$(Aa + Bb + Cc)\,t + Ax_o + By_o + Cz_o + D = 0 \ (*)$$

Mỗi nghiệm của phương trình(*) ẩn t ứng với 1 giao điểm của Δ và (α):

1) Nếu Aa + Bb + Cc ≠ 0 thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất ⇒ Δ cắt (α).

2) Nếu Aa + Bb + Cc ≠ 0 và $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ thì (*) vô nghiệm, khi đó $\Delta \,//\, (\alpha)$

3) Nếu Aa + Bb + Cc = 0 và $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ thì (*) vô số nghiệm khi đó $\Delta \subset (\alpha)$.

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ đi qua M và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$, đường thẳng Δ′ đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a'}$, ta có:

1) Δ và Δ′ chéo nhau ⇔ $\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'} \neq 0$

2) Δ và Δ′ cắt nhau ⇔ $\begin{cases} \left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right]\overrightarrow{MM'} = 0 \\ \left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

3) Δ // Δ′ ⇔ $\begin{cases} \left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right] = \vec{0} \\ \left[\vec{a},\overrightarrow{MM'}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$

4) Δ ≡ Δ′ ⇔ $\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right] = \left[\vec{a},\overrightarrow{MM'}\right] = \vec{0}$

6. Khoảng cách

1) Khoảng từ một điểm đến một đường thẳng

Cách 1: Muốn tìm khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng (Δ) ta làm như sau:

- Viết pt mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với đường thẳng Δ
- Tìm toạ độ giao điểm H của (Δ) và (α)
- Tính độ dài MH, đó chính là khoảng cách từ M đến Δ ký hiệu là d(M, Δ)

Cách 2: Sử dụng công thức $d(M,\Delta) = MH = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ ($M_0 \in (\Delta)$), $\vec{a}$ vectơ chỉ phương của (Δ).

2) Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) ta làm như sau:

- Lấy một điểm tuỳ ý $M_0 \in \Delta$
- Tính khoảng cách $d(M_0, \alpha)$ từ M_0 đến Δ

Khoảng cách này chính là khoảng cách giữa Δ và (α) và được ký hiệu là d(Δ, α).

3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cách 1. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ′ ta làm như sau:

- Lập phương trình mặt phẳng α chứa Δ và song song với Δ′.

• Lấy một điểm M tuỳ ý trên Δ′ rồi tính khoảng cách từ M đến α. Khoảng cách này chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ′ ký hiệu là d(Δ, Δ′)

Cách 2: Sử dụng công thức: $d(\Delta;\Delta') = h = \dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right]\right|}$

(M ∈ Δ, $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của Δ. M' ∈ Δ', $\vec{a'}$ là véctơ chỉ phương của Δ'.

B. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1.

Viết PT tổng quát của đường thẳng biết PT tham số:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

Giải: Ta có: $\begin{cases} x - 2 = -t \\ \dfrac{y}{2} = t \\ \dfrac{z+1}{2} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{z+1}{2} = \dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng biết PT chính tắc:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{0}$$

Giải: Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 3.

Viết phương trình tham số (từ đó suy ra PT chính tắc) của đường thẳng biết PT tổng quát: $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Giải: Ta có:

$$+\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 & (1) \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$3x + 4z - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}z$$

Đặt z = t, thay vào (1): $\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t + y - t + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{3}t$.

Ta có PT tham số: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t \\ y = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{3}t \\ z = t \end{cases}$

Đường thẳng này đi qua điểm $\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{10}{3}; 0\right)$ và vectơ chỉ phương $\vec{\imath} = \left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{7}{3}; 1\right) = \dfrac{1}{3}(-4; 7; 3)$.

Ví dụ 4. Viết phương trình đường thẳng là giao tuyến của 2 mặt phẳng: 5x − 7y + 2z − 3 = 0 và mp Oxy

Giải: Mặt phẳng Oxy có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$ và đi qua gốc tọa độ nên có phương trình: z = 0.

Vậy pt đường thẳng phải tìm là:

$$\begin{cases} 5x - 7y + 2z - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

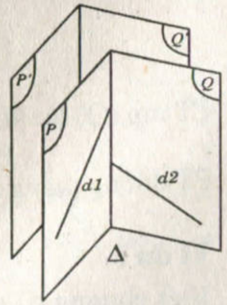
Ví dụ 5.

Viết phương trình đường thẳng song song với hai mp:

3x + 12y − 3z − 5 = 0, 3x − 4y + 9z + 7 = 0,

và cắt hai đường thẳng:

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$$



Hình 40

Giải: Đường thẳng (Δ) phải tìm là giao tuyến của hai mp (P) và mp(Q).

Mp (P) chứa (d_1): $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$ đi qua điểm (–5; 3; –1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; -4; 3)$. Vì (Δ) là giao tuyến của mp (P) và mp (Q), mà (P) // (P'), (Q) // (Q') nên (P) có cùng vectơ pháp tuyến với (P'): $3x + 12y - 3z - 5 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (3; 12; -3) = 3(1; 4; -1)$, và (Q) có cùng vectơ pháp tuyến với (Q'): $3x - 4y + 9z + 7 = 0$.

$$\overrightarrow{n_2} = (3; -4; 9)$$

Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$ của (Δ) là tích có hướng của $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$.

⇒ Vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (32; -12; -16) = 4(8; -3; -4)$$

Mp (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_\Delta}$ nên có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{u}_P = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_\Delta}] = \left(\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \right) = (25; 32; 26)$$

PT mp (P) là: $25(x + 5) + 32(y - 3) + 26(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 25x + 32y + 26z + 55 = 0$$

Mp (Q) chứa (d_2): $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$, đi qua điểm (3; –1; 2) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-2; 3; 4)$ và $\overrightarrow{u_\Delta} = (8; -3; -4)$ nên có vectơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{n_Q} = [\vec{u}_2; \overrightarrow{u_\Delta}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (0; 24; -18) = 6(0; 4; -3)$$

PT mp (Q) là: $4(y + 1) - 3(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 4y - 3z + 10 = 0$

PT đường thẳng (Δ) phải tìm là: $\begin{cases} 25x + 32y + 26z + 55 = 0 \\ 4y - 3z + 10 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 6.

Viết phương trình mp qua đường thẳng:

$\begin{cases} 2x - 3y + z - 3 = 0 \\ x + 3y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ và song song với trục Ox.

Giải. Mp phải tìm thuộc chùm mp:

$$m(2x - 3y + z - 3) + n(x + 3y + 2z + 1) = 0, (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (2m + n)x + (-3m+3n)y + (m + 2n)z - 3m + n = 0$$

Vì mp phải tìm song song với trục Ox có vectơ chỉ phương $\vec{i} = (1; 0; 0)$ nên ta có: $2m + n = 0 \Leftrightarrow 2m = -n$. Chọn $m = -1$, $n = 2$, ta được PT mp phải tìm là: $9y + 3z + 5 = 0$.

Ví dụ 7.

Viết PT mp qua đường thẳng:

$\begin{cases} x - 3y + 7z + 36 = 0 \\ 2x + y - z - 15 = 0 \end{cases}$ và cách gốc toạ độ một khoảng bằng 3.

Giải: MP phải tìm thuộc chùm mp:

$$m(x - 3y + 7z + 36) + n(2x + y - z - 15) = 0 \; (m^2 + n^2 \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow (m + 2n)x + (-3m + n)y + (7m - n)z + 36m - 15n = 0$$

Theo công thức khoảng cách, ta có:

$$\frac{|36m - 15n|}{\sqrt{(m+2n)^2 + (-3m+n)^2 + (7m-n)^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow 85m^2 + 19n^2 - 104mn = 0$$

$$\Leftrightarrow 85\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 104\frac{m}{n} + 19 = 0 \text{ (vì } n \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m}{n} = 1 \\ \frac{m}{n} = \frac{19}{85} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = n \\ 85m = 19n \end{array}\right.$$

Chọn $m = n = 1$, ta có mp phải tìm là: $3x - 2y + 6z + 21 = 0$

Chọn $m = 19$, $n = 85$, ta có mp phải tìm là: $189x + 28y + 48z - 591 = 0$.

Ví dụ 8. Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng:

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4} \text{ và mp } 3x - y + 2z - 5 = 0$$

Giải: PT đường thẳng có thể viết dưới dạng tham số:

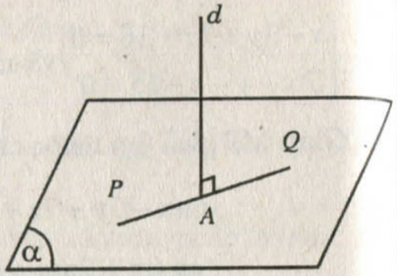
$$\begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = 4 + t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

Thay chúng vào PT mp: 3(7 + 5t)– (4 + t) + 2(5 + 4t) – 5 = 0 ⇔ t = –1. Thay lại vào PT đường thẳng, ta được toạ độ giao điểm (2; 3; 1).

Ví dụ 9.

Tìm điểm Q đối xứng với P(4; 1; 6) qua đường thẳng:

$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$



Hình 41

Giải: Viết PT đường thẳng (d) đã cho dưới dạng tham số:

$$\begin{array}{ll} \ x - y - 4z + 12 = 0 & (1) \\ +\ 2x + y - 2z + 3 = 0 & (2) \\ \hline 3x - 6z + 15 = 0 \Leftrightarrow x = -5 + 2z. & \end{array}$$

Đặt z = t và thay vào một trong hai PT của (d), ta có PT tham số:

(d) $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 7 - 2t \\ z = t \end{cases}$ đi qua điểm (–5; 7; 0) và vectơ chỉ phương

$\vec{u}$ = (2; –2; 1). Viết PT mp (α) qua P(4;1;6) và vuông góc với (d) nên nhận $\vec{u}$ của (d) làm vectơ pháp tuyến.

Vậy PT mp (α) là: 2(x – 4) – 2(y – 1) + z – 6 = 0 ⇔ 2x – 2y + z – 12 = 0.

Tìm toạ độ giao điểm A của (d) và (α) bằng cách thay PT tham số của (d) vào PT (α): 2(–5 + 2t) – 2(7 – 2t) + t – 12 = 0

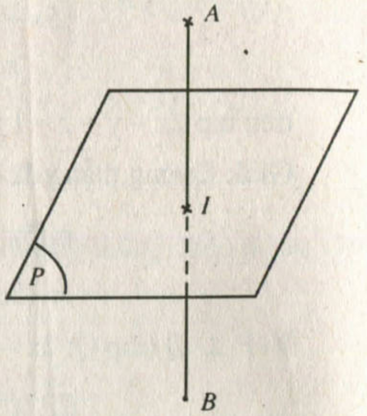
⇔ t = 4. Thay lại vào PT tham số của (d) được toạ độ A(3; –1; 4).

Theo tính chất đối xứng thì A là trung điểm PQ, dễ dàng có:

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2}(x_P + x_Q) \\ y_A = \frac{1}{2}(y_P + y_Q) \\ z_A = \frac{1}{2}(z_P + z_Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{1}{2}(4 + x_Q) \\ -1 = \frac{1}{2}(1 + y_Q) \\ 4 = \frac{1}{2}(6 + z_Q) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 2 \\ y_Q = -3 \Rightarrow Q(2; -3; 2) \\ z_Q = 2 \end{cases}$$

Ví dụ 10. Tìm điểm B đối xứng với A(1; 3; –4) qua mp: 3x + y – 2z = 0.



Hình 42

Giải: Trước hết, tìm PT đường thẳng AB. Theo tính chất đối xứng, đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với (P) nên nhận véctơ pháp tuyến n = (3; 1; –2) của (P) làm véctơ chỉ phương, suy ra phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$. Toạ độ giao điểm I của AB và (P) là nghiệm của hệ PT:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = -4 - 2t \\ 3(1 + 3t) + 3 + t - 2(-4 - 2t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -2 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 2; -2).$$

Theo tính chất đối xứng thì I là trung điểm AB nên dễ dàng tính được toạ độ điểm I.

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y_I = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \\ z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = \frac{1}{2}(1 + x_B) \\ 2 = \frac{1}{2}(3 + y_B) \\ -2 = \frac{1}{2}(-4 + z_B) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -5 \\ y_B = 1 \\ z_B = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-5; 1; 0).$$

Ví dụ 11.

Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng:

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

trên mp $2x - y + z - 1 = 0$

Giải: Đường thẳng đã cho thuộc chùm mp:

$$m(5x - 4y - 2z - 5) + n(x + 2z - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5m + n)x - 4my + 2(-m + n)z - 5m - 2n = 0 \ (P)$$

Vì P ⊥ Q (mp Q: $2x - y + z - 1 = 0$) nên phải có:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{n_Q} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P} \,.\, \overrightarrow{n_Q} = 0$$

$$2(5m + n) + 4m + 2(-m + n) = 0 \Leftrightarrow 3m = -n.$$

Chọn $m = -1$, $n = 3$, thay vào (P) được mp:

$$-2x + 4y + 8z - 1 = 0$$

PT hình chiếu của đường thẳng phải tìm là: $\begin{cases} -2x + 4y + 8z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 12. (Đại học sư phạm thành phố Hồ Chí Minh – A, B – 2000)

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho các đường thẳng:

$$(D_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3},$$

$$(D_2): \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

Tính khoảng cách giữa (D_1) và (D_2).

Giải. $M_1 \in D_1$, $M_1 = (1; 2; 3)$ vectơ chỉ phương của (D_1): $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$

$M_2 = (2; -1, 0) \in (D_2)$

Vectơ chỉ phương của (D_2):

$$\vec{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = 5(1; -1; -1)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1; -3; -3)$$

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (1; 4; -3)$$

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} = 1.1 + 4.(-3) + (-3).(-3) = -2$$

$$\left\| \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right] \right\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}$$

Áp dụng công thức tính khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau vào bài toán ta có:

$$d(D_1, D_2) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right] . \overrightarrow{M_1M_2} \right|}{\left\| \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \right] \right\|} = \frac{2}{\sqrt{26}}$$

C. BÀI TẬP

93. Cho đường thẳng (d) có PT: $\begin{cases} x - z\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ y - z\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \end{cases}$ (α là tham số)

1) Xác định vectơ chỉ phương của (d).

2) Chứng minh (d) tạo với trục Oz một góc không phụ thuộc α.

3) Viết PT hình chiếu (d’) của (d) trên mp Oxy.

4) Chứng minh với mọi giá trị α đường thẳng (d’) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định thuộc mp Oxy.

94. Đường thẳng (d_k) có pt: $\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ (1 - k)x - ky = 0 \end{cases}$ với $k \neq 0$, bất kỳ. Chứng minh rằng khi k thay đổi đường thẳng d_k luôn:

1) Đi qua 1 điểm cố định.

2) Thuộc một mp cố định.

95. Viết PT mặt phẳng chứa đường thẳng $\begin{cases} x-2z=0 \\ 3x-2y+z-3=0 \end{cases}$ và vuông góc với mặt phẳng: $x-2y+z+5=0$.

96. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-5}{4}$ và $\begin{cases} x=7+3t \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$ cùng thuộc một mp, viết PT mp đó.

97. Tìm PT hình chiếu của đường thẳng $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ lên mp $x+2y+3z+4=0$.

98. Chứng minh rằng hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

(d_1): $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=4t+6$.

(d_2): $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t+20$.

99. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

$$(d_1)\begin{cases} 2x-z-1=0 \\ -x-y+4=0 \end{cases} \quad (d_2)\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 3y-3z-6=0 \end{cases}$$

100. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian cách đều ba điểm A(1; 1; 1), B(−1; 2; 0), C(2; −3; 2).

101. 1) Viết PT đường thẳng đi qua điểm A(0; 1; 1), vuông góc với đường thẳng $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và cắt đường thẳng $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$

2) Cho A(1; 2; −1), B(7; −2; 3) và đường thẳng (d) có PT:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$$

a) Chứng minh rằng, đường thẳng (d) và đường thẳng AB cùng nằm trong một mp.

b) Tìm điểm $I \in (d)$ sao cho AI + BI nhỏ nhất

102. Cho mặt phẳng (P): $2x+y+z-1=0$, và đường thẳng (d): $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{-3}$

Viết PT của đường thẳng qua giao điểm của (d) và (P), vuông góc với (d) và nằm trong (P).

103. Chứng tỏ rằng đường thẳng: $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ nằm trong mp:

$$4x-3y+7z-7=0.$$

104. Cho hai đường thẳng có PT:

$$(d_1): \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z+4=0 \end{cases}, \ (d_2): \begin{cases} x+3y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

1) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó chéo nhau.

2) Tính khoảng cách giữa chúng.

3) Viết PT đường thẳng qua M(2; 3; 1) và cắt (d_1), (d_2).

105. Cho hai đường thẳng : $(d_1)\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t+2 \\ z=3t-3 \end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases} x=s+2 \\ y=2s-3 \\ z=3s+1 \end{cases}$

1) Chứng tỏ rằng (d_1), (d_2) là hai đường thẳng chéo nhau.

2) Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).

(Đại học tổng hợp Hà Nội, khối A, năm 1994).

106. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho điểm M(1; 2; −1) và đường thẳng (d) có PT: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$.

Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng (d). Tính độ dài đoạn thẳng MN.

(Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1997).

107. Trong không gian, cho hình bình hành ABCD có hai đỉnh C(−2; 3; −5), D(0; 4; −7) và giao điểm hai đường chéo M(1; 2; $-\dfrac{7}{2}$).

1) Viết PT đường thẳng chứa cạnh AB.

2) Tính khoảng cách từ gốc toạ độ đến mp chứa hình bình hành.

(Đại học dân lập Đông Đô Hà Nội, khối A, 1997).

108. Δ ABC có A(1; 2; 5) và PT hai trung tuyến là:

$$\frac{x-3}{-2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-1}{1} \text{ và } \frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-2}{1}$$

1) Viết PT chính tắc các cạnh của ΔABC.

2) Viết PT chính tắc đường phân giác trong góc A.

(Học viện Kỹ thuật quân sự Bộ Quốc phòng).

109. Trong không gian với hệ toạ độ Đecac vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.

b) Cho điểm M (2; 1; 4). Tìm toạ độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

(Trích đề thi vào đại học khối A – 2002).

110. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc toạ độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.

a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

(Trích đề thi vào đại học khối A – 2004).

111. Trong không gian Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=3 \end{cases}$$

1) Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau

2) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P): $7x+y-4z=0$ và cắt hai đường thẳng d_1 và d_2.

(Trích đề thi vào đại học khối A – 2007).

112. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu

(S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$ và mặt phẳng

(P): $2x-y+2z-14=0$

1) Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

2) Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

(Trích đề thi vào đại học khối B – 2007).

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

113. Trong không gian Oxyz, toạ độ của vectơ $\vec{a} = 3\,\vec{i} + 2\,\vec{k}$ là

A. $\vec{a} = (3; 0; 2)$ B. $\vec{a} = (3; 2; 0)$

C. $\vec{a} = (3; 1; 2)$ D. $\vec{a} = (1; 3; 2)$

114. Cho vectơ $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(0; 1; 4)$, $\vec{c}(1; 0; -3)$. Xác định toạ độ của vectơ $2\,\vec{a} - \vec{b} - 2\,\vec{c}$.

A. (2; 5; 1), B. (2; 5; 0) , C. (1; 4; 1), D. (2; 4; 0)

115. Cho 4 điểm M(–1; 5; –10), N(5; –7; 8), P(2; 2; –7), Q(8; –10; 11)

Tứ giác MNPQ là hình gì?

A. Hình bình hành B. Hình vuông

C. Hình thoi D. Hình chữ nhật

116. Tìm tâm và bán kính hình cầu có phương trình là:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

A. (1; –2; 0); R = 5 , B. (–2; 0; 1); R = 5,

C. (–2; 1; 0); R = 5, D. (–2; 1; 0); R = 4

117. Viết phương trình mặt phẳng qua gốc toạ độ O(0; 0; 0) và hai điểm P(4; –2; 1), Q(2; 4; –3)

A. $x + 5y + 10z = 0$ B. $2x + 5y + 10z = 0$

C. $x + 7y + 10z = 0$ D. $3x + 7y + 10z = 0$

118. Tính khoảng cách từ điểm M(1; –1; 2) đến mặt phẳng (P) có phương trình $10x + 10y + 5z + 2 = 0$

A. 1; B. $\frac{4}{5}$; C. 2; D. 3

199. Viết phương trình mặt phẳng qua điểm M(2; 3; –1) và song song với mặt phẳng $5x - 3y + 2z - 10 = 0$

A. $5x - 3y + 2z + 1 = 0$ B. $5x + 3y + 2z - 1 = 0$

C. $3x - 3y + 2z + 1 = 0$ D. $x + 3y + 2z + 1 = 0$

120. Cho phương trình tham số của đường thẳng (Δ) $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$ thế thì phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) là:

A. $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{-8}$ B. $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$

C. $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-8}$ D. $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{8}$

21. Cho 3 điểm M(3; 6; –7), N(–5; 2; 3), P(4; –7; –2). Thế thì phương trình đường thẳng QP, Q là trung điểm của MN là:

A. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+7}{5}$ B. $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z+7}{5}$

C. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+7}{5}$ D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+7}{-5}$

122. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \qquad \Delta': \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

A. Cắt nhau; B. Chéo nhau; C. Song song; D. Trùng nhau.

II. BÀI TẬP.

123. Cho tứ diện ABCD. E, F, I theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, EF.

a) Chứng minh $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) Với điểm M bất kỳ trong không gian, hãy chứng minh:

$$4\,\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$$

124. Cho tứ diện ABCD mà M là điểm di động trong không gian, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tứ diện và trọng tâm tam giác BCD

1) Chứng minh $\overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

2) Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Ghi chú: Trọng tâm của tứ diện là giao điểm các đường nối mỗi đỉnh của tứ diện tới trọng tâm của mặt đối diện.

3) Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức:

$$3\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$$

125. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(3; 2; 6;), B(3, –1, 0), C(0, –7, 3), D(–2, 1, –1).

a) Chứng minh tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

b) Tìm góc giữa đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B và mp (α) đi qua ba điểm A, B, C.

c) Thiết lập PT mặt cầu ngoại tiếp tứ diện

(Đại học Bách khoa Hà Nội, năm 1996)

126. Cho mặt cầu (S) có PT: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 6$ và hai đường thẳng:

(d_1): $x = 1 + 2t, y = 3 - 2t, z = 1 + 2t$

(d_2): $x = 1 - t, y = 2 + 2t, z = 1 - 3t$

Viết PT mp tiếp xúc mặt cầu (S) đồng thời song song với (d_1) và (d_2).

127. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm A(1; 0; 0), B(0; 2; 0) và C(0; 0; 3).

1) Viết phương trình tổng quát của các mp (OAB), (OBC), (OCA) và (ABC)

2) Xác định toạ độ tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC.

3) Tìm toạ độ điểm J đối xứng với I qua mặt phẳng ABC.

(Đại học Huế – 2000)

128. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho điểm A(1; 2; 1) và đường thẳng (d) có PT: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z + 3$.

1) Viết PT mp đi qua A và chứa đường thẳng (d).

2) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d).

(Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 1997).

129. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho ba điểm $H\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $K\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $I\left(1; 1; \frac{1}{3}\right)$.

a) Viết PT giao tuyến của mp (KHI) và mp x + z = 0 ở dạng chính tắc.

b) Tính cosin của góc phẳng tạo bởi mp (KHI) và mp Oxy.

(Đại học Giao thông Vận tải Hà Nội, năm 1997).

130. Cho hai đường thẳng có PT: (d) $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$

$$(\Delta): \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}$$

1) Xác định vectơ chỉ phương của đường thẳng (d)

2) Chứng minh hai đường (d) và Δ cùng thuộc một mp, viết PT mp đó.

3) Viết PT chính tắc của hình chiếu song song của (d) theo phương (Δ) lên mp 3x – 2y – 2z – 1 = 0.

(Đại học Xây dựng Hà Nội (HS chưa phân ban), năm 1997).

131. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(3; –2; –4), song song với mp 3x – 2y –3z –7 = 0, đồng thời cắt đường thẳng $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{2}$

(Đại học Thuỷ lợi Hà Nội năm 1997).

132. Viết phương trình mp chứa gốc toạ độ và vuông góc với hai mp có PT:

$$x - y + z + 7 = 0 \text{ và } 3x + 2y - 12z + 5 = 0.$$

(Viện Đại học Mở Hà Nội, khối A, năm 1997).

133. Cho hai điểm A(0; 0; –3), B(2; 0; –1) và mặt phẳng (P) có phương trình là: 3x – 8y + 7z – 1 = 0.

1) Tìm toạ độ giao điểm của đường thẳng đi qua hai điểm A, B với mặt phẳng (P).

2) Tìm toạ độ điểm C nằm trên mp(P) sao cho tam giác ABC đều.

(Đại học Quốc gia Hà Nội – A – 2000).

ÔN TẬP CUỐI NĂM

134. Một hình hộp chữ nhật có độ dài đường chéo d, nó tạo với đáy góc α và mặt bên lớn góc β. Chứng minh thể tích hình hộp bằng $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

135. Đáy hình chóp là tam giác vuông có cạnh huyền a và góc nhọn α. Mặt bên qua cạnh huyền vuông góc với đáy, hai mặt còn lại tạo với đáy góc β. Chứng minh thể tích hình chóp bằng $\dfrac{a^3\sin^2 2\alpha tg\beta}{24\sqrt{2}\sin(\alpha+45^0)}$.

136. (Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh A – 2000).

Cho tam giác đều ABC cạnh a. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, K là trực tâm tam giác BCM.

1) Chứng minh rằng $MC \perp (BHK)$ và $HK \perp (BMC)$.

2) Khi M thay đổi trên d, tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện KABC.

137. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD với đáy là hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Mặt bên tạo với đáy một góc 60^o.

Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và cắt SC, SD lần lượt tại M và N. Cho biết góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt đáy hình chóp là 30^o.

1) Tứ giác ABMN là hình gì? Tính diện tích tứ giác ABMN theo a.

2) Tính thể tích hình chóp S.ABMN theo a.

138. Cho góc tam diện đỉnh O, các góc ở đỉnh đều bằng 60^o. Trên các cạnh Ox, Oy, Oz ta lấy các điểm A, B, C sao cho OA = a, OB = b, OC = c.

1) Cho a = b = c, thì hình chóp OABC có gì đặc biệt? Tính khoảng cách từ O đến mp (ABC) và tính thể tích của hình chóp này.

2) Với $a \neq b \neq c$, tính các cạnh của ΔABC theo a, b, c. Chứng minh điều kiện cần và đủ để $\widehat{BAC} = 1v$ là $bc + 2a^2 = a(b+c)$.

3) Cho biết a và b + c = d, $\widehat{BAC} = 1v$. Tính thể tích của hình chóp theo a và d. Lập phương trình để tính b, c trong trường hợp này. Tìm điều kiện để tính được b, c.

4) Chứng minh rằng nếu điều kiện trên được nghiệm đúng thì một trong hai số b, c nhỏ hơn a, số còn lại lớn hơn 2a.

139. Trong mp (P) cho đường thẳng d cố định và một điểm cố định $O \notin d$, một góc vuông $\widehat{Oxy}$ quay quanh O, Ox và Oy cắt d tại A và B. Cho $d' \perp P$ tại O. Lấy $S \in d'$ thoả mãn $SO = \dfrac{8a}{3}$, $SA = \dfrac{5}{3}OA$. Khoảng cách từ O đến d bằng a và $\widehat{OAB} = \alpha$.

a) Tính α.

b) Kẻ $OE \perp SA$, $OF \perp SB$. Tìm quỹ tích E, F khi $\widehat{xOy}$ quay quanh O.

c) Gọi G là trọng tâm ΔSAB, I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB. Chứng minh O, G, I thẳng hàng.

140. Cho hình cầu (O, R) tiếp xúc với mặt phẳng (P). Cho hình nón (nằm cùng phía với hình cầu đối với (P), đáy thuộc (P), đường cao h, bán kính đáy bằng R. Cắt hai hình bằng mp (Q) // (P), cách nhau một khoảng bằng x.

a) Cho x < 2R và x < h. Tính tổng diện tích S của hai thiết diện. Biểu thức tìm được có còn thích hợp không nếu h < x < 2R (kéo dài các đường sinh của hình nón để chúng cắt (Q).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị S (x là đối số). Biện luận các trường hợp.

141. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); SA = a; I là trung điểm của BC.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

b) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SAIC.

142. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai điểm: A(0; –2; 0), B(2; 1; 4) và mặt phẳng (α): $x + y - z + 5 = 0$.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua A và B.

b) Tìm trên đường thẳng d điểm M, sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{3}$.

c) Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB. Xét vị trí tương đối giữa mặt cầu (S) và mặt phẳng (α).

143. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho 4 điểm: S(2; 2; 6), A(4; 0; 0), B(4; 4; 0), C(0; 4; 0).

a) Chứng minh rằng hình chóp SABCO là hình chóp tứ giác đều.

b) Tính thể tích của khối chóp SABCO.

c) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCO.

144. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng có phương trình lần lượt là:

$$\Delta_1: \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases} \quad \Delta_2: \begin{cases} 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \\ 2x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ và điểm } A(3; 2; 5).$$

a) Tìm toạ độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng Δ_2.

b) Lập phương trình mặt phẳng đi qua đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

145. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho 2 đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 5z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$$

a) Xét vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2.

b) Cho điểm A(0; 1; 3). Tìm điểm M trên Δ_2 sao cho đoạn AM ngắn nhất.

146. Trong không gian với hệ toạ độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai điểm A(1; 2; 1), B(2; 1; 3) và mặt phẳng (P): x – 3y + 2z – 6 = 0.

a) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

b) Gọi đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Hãy viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Tìm toạ độ của điểm H.

147. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -4 - 2t \end{cases} \quad \text{và } \Delta_2: \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2.

b) Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ_3 đi qua M(2; 3; 1) và cắt cả Δ_1 và Δ_2.

148. Trong không gian Oxyz cho 2 mặt phẳng:

$$(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$$

$$(\beta): x + 6y + 2z + 5 = 0$$

a) Chứng minh rằng (α) và (β) vuông góc với nhau.

b) Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ O và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

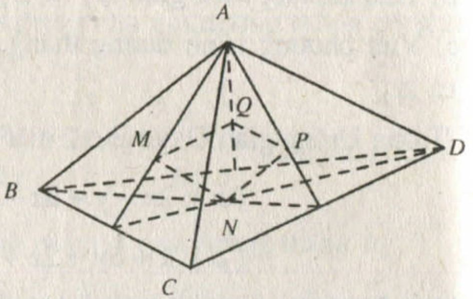
HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ

1. a) Trong khối đa diện mỗi cạnh là cạnh chung của đúng 2 mặt

   b) Cũng sử dụng tính chất trên

2. Chia khối lập phương thành 6 khối tứ diện.

3. Cho tứ diện đều ABCD. Tâm của các mặt ABC, BCD, ACD, ADB là M, N, P, Q



Hình 43

Xét khối tứ diện MNPQ. Dùng định lý Talet ta chứng minh $MN = \dfrac{AD}{3}$;

$NP = \dfrac{AB}{3}$; $MQ = \dfrac{CD}{3}$. Do đó $MN = NP = NQ = MQ = MP = PQ = \dfrac{a}{3}$.

Khối tứ diện đều cạnh a có thể tích $V = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Khối tứ diện MNPQ cạnh $\dfrac{a}{3}$ có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{324}$

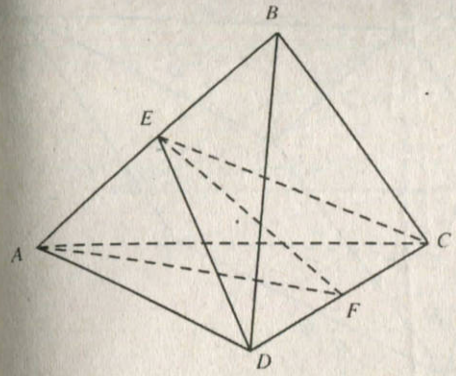
$$V_{ABCD} = 27.\ V_{MNPQ}$$

4. a) AEDF – AEFC – BEDF – BEFC.

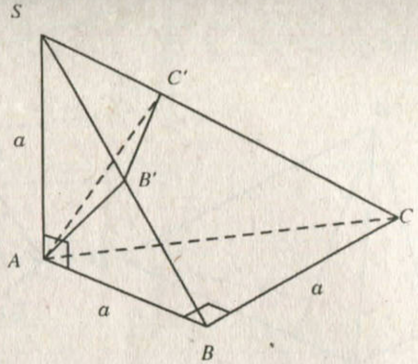
   b) $V_{AEDF} = V_{AEFC}$ vì $S\ \Delta_{ADF} = S\ \Delta_{AFC}$ và cùng chiều cao EH. Chứng minh tương tự ta suy ra:

   $V_{AEDF} = V_{AEFC} = V_{BEDF} = V_{BEFC}$.

   c) Nếu ABCD là tứ diện đều khi đó ta chứng minh (EDC) là mặt phẳng đối xứng của hình, (ABF) cũng là mặt phẳng đối xứng của hình. Khi đó ta chứng minh được 4 khối tứ diện AEDF, AEFC, BEDF và BEFC bằng nhau theo nghĩa có phép dời hình (đối xứng qua mặt phẳng) biến khối này thành khối kia.



Hình 44



Hình 45

5. a) $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.(\dfrac{1}{2}a^2)a = \dfrac{a^3}{6}$.

   b) Từ $BC \perp AB$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$

   $\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$; $AC' \perp SC \Rightarrow SC \perp (AB'C')$.

   c) Cho S.AB′C′ có chiều cao SC′, đáy là $\Delta\ AB'C'$ vuông ở B′ vì

   $(AB' \perp (SBC)$ nên $AB' \perp B'C')$. Ta có $AB' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $AC'.\ SC = a.AC$

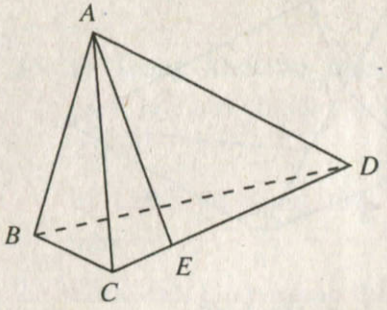
   mà $SC = a\sqrt{3}$ nên $AC' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow B'C' = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ và $SC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

   Vậy $V_{S.AB'C'} = \dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6}).\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{36} \Rightarrow V_{S.ABC} = 6\ V_{S.AB'C'}$.

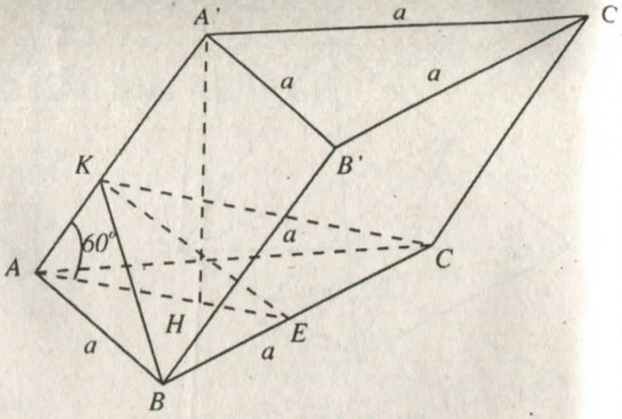
6. Trên cạnh CD lấy E chia trong CD theo tỷ số $\dfrac{m}{n}$.

   Nối BE và AE. Mặt phẳng ABE chia khối tứ diện ABCD thành 2 khối chóp có cùng chiều cao. Ta dễ dàng chứng minh $\dfrac{S_{\Delta BED}}{S_{\Delta BEC}} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow$

   $\dfrac{V_{ABED}}{V_{ACED}} = \dfrac{m}{n}$.



Hình 46



Hình 47

7. a) Đáy lăng trụ là ΔABC có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Tâm đáy là H vì A′A = = A′B = A′C nên $A'H \perp (ABC)$ và $\widehat{A'AH} = 60^0$ là góc giữa AA′ và mặt đáy. Ta có $AH = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ nên $AH' = AH\,tg60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$

Vậy thể tích lăng trụ ABC.A′B′C′ $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) $BC \perp AH$, $BC \perp A'H \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ $\Rightarrow BC \perp BB' \Rightarrow$ BCC′B′ là hình chữ nhật.

c) $\widehat{A'AH} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AA'H} = 30^\circ \Rightarrow AA' = 2AH = 2a \Rightarrow S_{BCC'B'} = 2a^2$

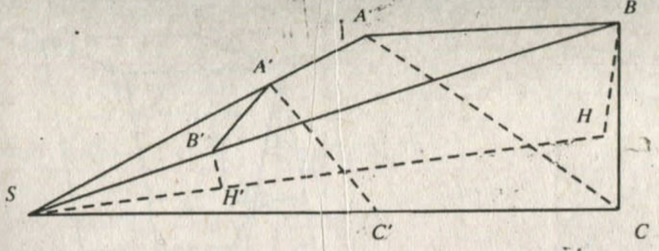
Từ E vẽ $EK \perp AA' \Rightarrow$ BKC là thiết diện thẳng của lăng trụ. Ta tính được

$$BK = CK = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{13}}{4} \Rightarrow \text{Diện tích } S_{AA'B'B} = S_{\Delta A'C'C} = \frac{a^2\sqrt{13}}{2}$$

Vậy $S_{xq} = a^2.\sqrt{13} + 2a^2 = a^2(2 + \sqrt{13})$ đơn vị diện tích

8. Vẽ chóp S.ABC. Từ B và B′ hạ $BH \perp (SAC)$, $B'H' \perp (SAC)$. Khi đó

$$\frac{BH}{B'H'} = \frac{SB}{S'B'}.$$



Hình 48

$$\left.\begin{aligned}&\text{Diện tích } \Delta SAC = \frac{1}{2}SA.SC.\sin\widehat{ASC}\\ &\text{Diện tích } \Delta SA'C' = \frac{1}{2}SA'SC'\sin\widehat{ASC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SA'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}.$$

$$\text{Do đó } \frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\Delta SAC}.BH}{\frac{1}{3}S_{\Delta SA'C'}.B'H'} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SB}{SB'} \text{ (đpcm).}$$

Áp dụng điều này vào bài tập số 5 với $SC' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SC = a\sqrt{3}$.

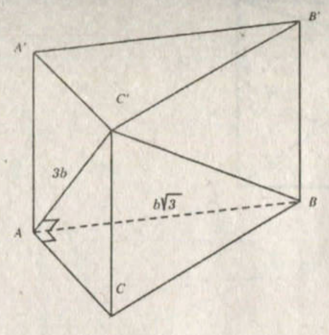
$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}} = \frac{SA}{SA'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SB}{SB'} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

9. a) $AA' \perp AB$, $AA' \perp AC$, $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (AA'C'C) \Rightarrow BC'$ là đường xiên có hình chiếu trên (AA′C′C) là $AC' \Rightarrow \widehat{BC'A} = 30^\circ$.

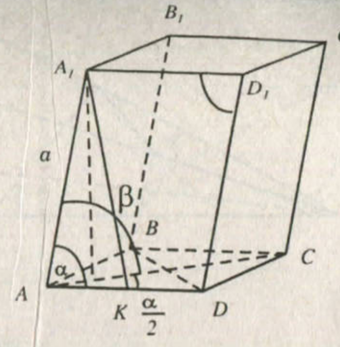
$\Rightarrow AC' = AB\,.\,cotg30^\circ = AB\sqrt{3}$ mà $AB = AC.cotg30^\circ = b\sqrt{3} \Rightarrow AC' = 3b$.

b) $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}\,.\,CC' =$

$$= (\frac{1}{2}b\,.\,b\sqrt{3}).\sqrt{9b^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b^3\sqrt{8} = b^3.\sqrt{6}$$



Hình 49



Hình 50

10. Hạ $A_1H \perp AC$ ($H \in AC$) Δ A_1BD cân (do $A_1B = A_1D$) ⇒ $BD \perp A_1O$. Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (A_1AO) \Rightarrow BD \perp A_1H$

Dẫn đến $A_1H \perp (ABCD)$. Đặt $\widehat{A_1AC} = \varphi$ ta có hệ thức:

$$\cos\alpha = \cos\varphi\cos\frac{\alpha}{2}.\ (*).$$

Thật vậy: vẽ $A_1K \perp AD \Rightarrow HK \perp AK$

$$\Rightarrow \cos\varphi\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA_1}.\frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA_1} = \cos\alpha.$$

Từ (*) suy ra $\cos\varphi = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow A_1H = a\sin\varphi.$

$$= a\sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}$$

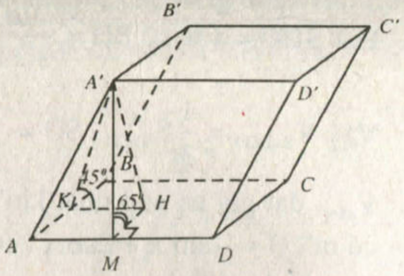
Vậy thể tích khối hộp $V = (AB.AD)\sin\alpha\ .\ A_1H =$

$$= a^2\sin\alpha\ .\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha} = 2a^3\sin\frac{\alpha}{2}.\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\alpha}\ .$$

11. Kẻ $A'H \perp (ABCD)$, $H \in (ABCD)$ và kẻ $HM \perp AD$ ($M \in AD$), $HK \perp AB$ ($K \in AB$)

Theo định lý 3 đường vuông góc ta có $AD \perp A'M$, $AB \perp A'K$.

$\Rightarrow \widehat{A'MH} = 60^\circ$, $\widehat{A'KH} = 45^\circ$



Hình 51

Đặt $A'H = x \Rightarrow A'M = \dfrac{x}{\sin 60^0} = \dfrac{2x}{\sqrt{3}}$

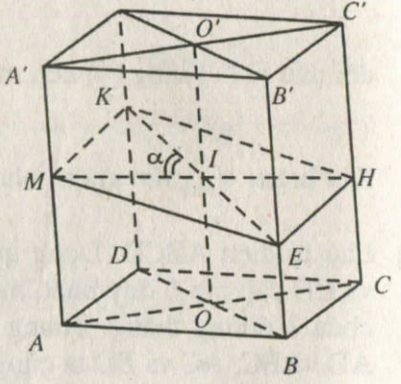
$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{\frac{3c^2-4x^2}{3}}$$

$= HK$, nhưng $HK = x\cot g45^0 = x$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3c^2-4x^2}{3}} \Rightarrow x = c\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Vậy thể tích lăng trụ là

$V = a.b.x = abc\ .\ \dfrac{3}{7}$ (đơn vị thể tích).



Hình 52

12. Gọi OO_1 là giao tuyến của 2 mặt chéo (A_1C_1CA) và (B_1D_1DB). Qua $I \in OO_1$ kẻ lần lượt 2 đường thẳng KE và MH đều vuông góc với OO_1. Khi đó α là góc giữa MH và KE và MEHK là thiết diện thẳng của hộp. Đặt KE = x, MH = y thì

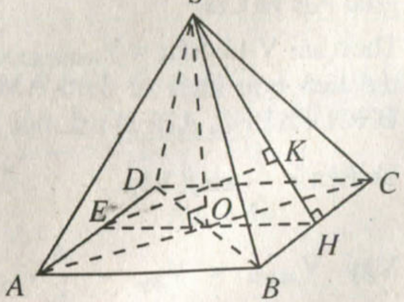
$$S_{MEHK} = \frac{1}{2}xy.\sin\alpha$$

$$\Rightarrow V_{hộp} = S_{MEHK}\ .\ AA_1 = \left(\frac{1}{2}xy.\sin\alpha\right).a$$

$S_1 = xa$, $S_2 = ya$.

Vậy $V_{hộp} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{S_1}{a}.\dfrac{S_2}{a}.\sin\alpha\ .a$

$$= \frac{S_1.S_2\sin\alpha}{2a}.$$



Hình 53

13. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, $SO \perp (ABCD)$

Gọi EH là đường trung bình của ABCD, vì AD // (SBC) ⇒ khoảng cách từ A đến (SBC) chính là khoảng cách từ E đến (SBC). Kẻ $EK \perp SH \Rightarrow EK \perp (SBC) \Rightarrow EK = 2a$.

Do BC ⊥ SH, BC ⊥ OH ⇒ $\widehat{SHO}$ là góc giữa (SBC) và đáy

Đặt $\widehat{SHO} = x$ ta có $BH = \dfrac{2a}{\sin x}$, $OH = \dfrac{a}{\sin x}$, $SO = OH\,\mathrm{tg}x = \dfrac{a}{\cos x}$

Vậy $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \, . \, SO = \dfrac{4a^3}{3\cos x \sin^2 x}$.

$V_{chóp}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m(x) = \cos x \, . \, \sin^2 x$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có $m'(x) = -\sin^3 x + 2\sin x \, . \, \cos^2 x = \sin x \, . \, (2\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= \sin x \, . \, (2 - 3\sin^2 x) = 3\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sin x\right) . \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sin x\right)$$

Vì $x \in (0; 90^0)$ nên $m'(x) = 0$ khi $\sin x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ và qua giá trị đó thì $m'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (–) nên $m(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

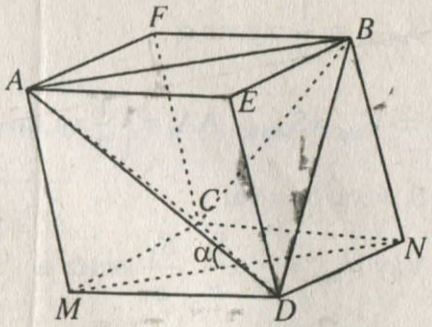
Kết luận: $V_{chóp}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin x = \sin\widehat{SHO} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

14. Cho tứ diện ABCD. Dựng qua AB và CD cặp mp // duy nhất, mỗi mặt chứa 1 đường thẳng. Tương tự với AD và BC; AC và BD ta cũng dựng 2 cặp mp như vậy.

Ta dựng được 1 hình hộp ngoại tiếp tứ diện đó là AEBF . MDNC.

Chiều cao của hộp là khoảng cách giữa AB và CD.

Theo bài V tứ diện = $V_{ABEF.MDNC}$ ⇒ thể tích bốn khối tứ diện AMCD, BNCD, ABFC, ABED mà mỗi khối tứ diện = $\dfrac{1}{6}$ khối hộp.



Hình 54

Vậy $V_{ABCD} = V_{hộp} - \dfrac{4}{6}V_{hộp} = \dfrac{1}{3}V_{hộp} = \dfrac{1}{3} \, . \, (\dfrac{1}{2}AB.CD\sin\alpha).d$

$$= \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha .$$

15. Dựng tứ diện mới APQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR, RP, PQ. Ta có $AD = BC = \dfrac{PQ}{2}$ ⇒ Δ QAP vuông ở A. Vậy QA ⊥ AP.

Tương tự ta có AQ ⊥ AR, AP ⊥ AR.

Vậy $V_{A.PQR} = \dfrac{1}{6}$ AQ . AP . AR.

Mặt khác cũng thấy $ABCD = \dfrac{1}{4}V_{APQR}$

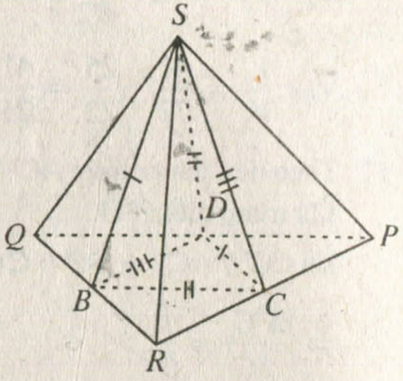
Do APQ, APR, ASR là vuông ⇒

$AP^2 + AQ^2 = 4c^2$

$AQ^2 + AR^2 = 4a^2$

$AP^2 + AR^2 = 4b^2$

$AP^2 + AQ^2 + AR^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$



Hình 55

Vậy $AP^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2)$; $AQ^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2)$; $AR^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)$.

Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{24}AP \, . \, AQ \, . \, AR =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} . \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

6. a) Kéo dài EP cắt A'D' tại N, cắt A'B' tại M

AN cắt DD' tại P, AM cắt BB' tại Q

Vậy thiết diện cần tìm khi cắt lập phương bởi (AEF) là ngũ giác APEFQ

b) Coi thể tích lập phương là V

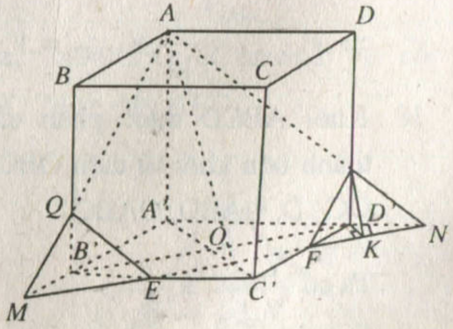
V_1 là thể tích khối ABCD.QEC'FD

V_2 là thể tích khối AQEFD.B'A'D'

V_3 là thể tích tứ diện AMNA'

V_4 là thể tích tứ diện PEDN

V_5 là thể tích tứ diện QMB'E'



Hình 56

Dễ thấy $V_4 = V_5 = \dfrac{1}{6}PD' \, . \, D'F \, . \, D'N = \dfrac{1}{6} \, . \, \dfrac{a}{3} \, . \, \dfrac{a}{2} \, . \, \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{72}$

$$V_3 = \frac{1}{6}AA'.A'M.A'N = \frac{1}{6}a.3\frac{a}{2}.3\frac{a}{2} = \frac{3}{8}a^3$$

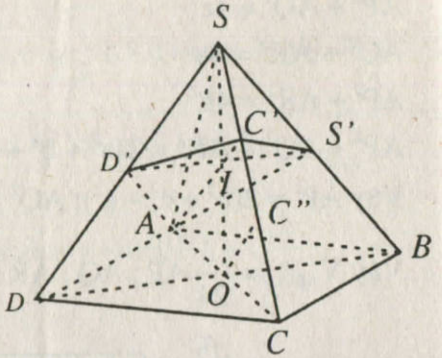
$$V_2 = V_3 - 2V_4 = \frac{25}{72}a^3 \qquad V_1 = V - V_2 = \frac{47}{72}a^3$$

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{47}{72} : \frac{25}{72} = \frac{47}{25}$.

17. Theo đầu bài ta thấy AC', B'D' và SO (O = AC $\cap$ BD) đồng quy tại I và I là trung điểm SO.

Kẻ CC' // AC' $\Rightarrow$ SC' = C'C'' = C''C

$$\Rightarrow \frac{S'C'}{SC} = \frac{1}{3}.$$



Hình 57

Theo bài tập 8

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Chứng minh tương tự $\frac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}}$

$$= \frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

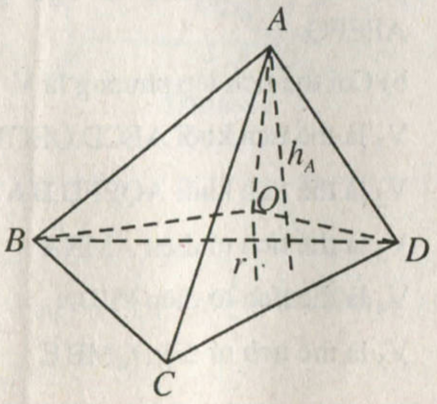
$$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{12}.V_{SABCD} = V_{S.AD'C'} \Rightarrow V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$$

18. Khối ABCD được phân chia thành bốn khối tứ diện OBCD, OCAD, OABD, OABC.

Ta có $\frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{d}{h_A}$;

$$\frac{V_{OCAD}}{V_{ABCD}} = \frac{d}{h_B};\ \frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}} = \frac{d}{h_C};$$

$$\frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{d}{h_D}.$$



Hình 58

Suy ra $\frac{V_{OABC} + V_{OCAD} + V_{OABD} + V_{OABC}}{V_{ABCD}} = d\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) = 1.$

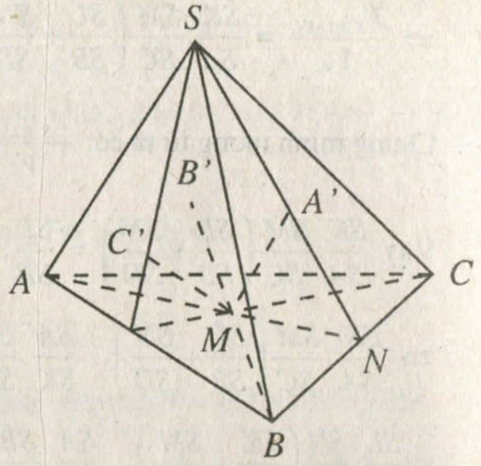
Vậy $\frac{1}{d} = \left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right)$

19. Gọi N = MA $\cap$ BC

Khi đó S, A', N thẳng hàng vì chúng cùng nằm trên giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBC) và (SA, A'M).

Gọi MM_1 và AA_1 là các đường vuông góc hạ từ M và A xuống mp (SBC) thì:

$$\frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MA}{AN} = \frac{MA'}{SA}.$$



Hình 59

Vậy $\frac{V_{MBSC}}{V_{SABC}} = \frac{V_{M.BSC}}{V_{A.BSC}} = \frac{MM_1}{AA_1} = \frac{MA'}{SA}.$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{V_{M.CAS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MB'}{SB}$; $\frac{V_{M.ABS}}{V_{S.ABC}} = \frac{MC'}{SC}$.

Do đó:

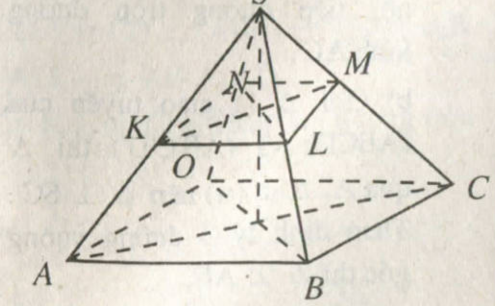
$$\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = \frac{V_{MBSC} + V_{MCSA} + V_{MABC}}{V_{SABC}} = \frac{V_{SABC}}{V_{SABC}} = 1$$

Với A', B', C' là giao điểm của ba mặt bên: SBC; SCA; SAB với các đường thẳng qua M và // với SA; SB; SC, M $\in$ đáy ABC.

20. Dễ thấy các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD đều có diện tích bằng nhau và bằng nửa diện tích S của hình bình hành ABCD

Các hình chóp S.ABC, S.ACD, S.BCD, S.ABD có cùng chiều cao. Vậy $V_{SABC} = V_{SACD} = V_{SABD}$

$= V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{SABCD} = V^*$



Hình 60

Dễ dàng có $\frac{V_{S.KLM}}{V_*} = \frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SM}{SC}$; $\frac{V_{S.KMN}}{V_*} = \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{S.KLMN}}{V_*} = \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}\left(\frac{SL}{SB}+\frac{SN}{SD}\right)$$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{V_{S.KLMN}}{V_*} = \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}\left(\frac{SK}{SA}+\frac{SM}{SC}\right)$

Vậy $\frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}\left(\frac{SL}{SB}+\frac{SN}{SD}\right) = \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}\left(\frac{SK}{SA}+\frac{SM}{SC}\right)$

$$\Rightarrow \frac{SK}{SA}.\frac{SM}{SC}\left(\frac{SL}{SB}+\frac{SN}{SD}\right).\frac{SA}{SK}.\frac{SB}{SK}.\frac{SC}{SM}.\frac{SD}{SN}$$

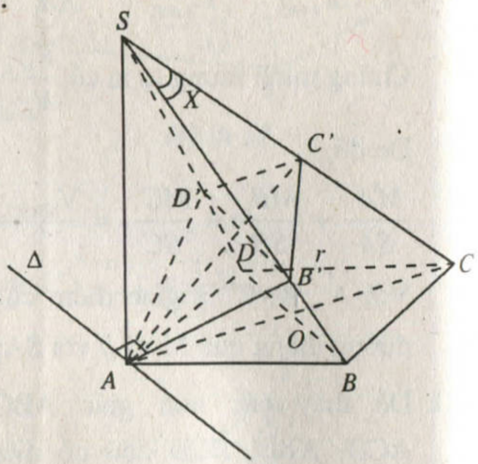
$$= \frac{SL}{SB}.\frac{SN}{SD}\left(\frac{SK}{SA}+\frac{SM}{SC}\right).\frac{SA}{SK}.\frac{SB}{SK}.\frac{SC}{SM}.\frac{SD}{SN}$$

$$\Rightarrow \frac{SD}{SD}+\frac{SB}{SL} = \frac{SC}{SM}+\frac{SA}{SK}$$ (đpcm).

21. a) SC ⊥ (AB'C'D') ⇒ SC ⊥ AB'. Mặt khác BC ⊥ (SAB)

Suy ra BC ⊥ AB'. Vậy AB' ⊥ (SBC) ⇒ AB' ⊥ B'C' ∈ (SBC)

Tương tự AD' ⊥ (SDC) ⇒ AD' ⊥ D'C' ⇒ AB'C'D' có 2 góc đối vuông nên là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC'.



Hình 61

b) Gọi Δ là giao tuyến của (ABCD) và (AB'C'D') thì Δ qua A, Δ ⊂ (α) nên Δ ⊥ SC. Theo định lý 3 đường vuông góc thì Δ ⊥ AC.

Do đó Δ là đường thẳng cố định.

Do AB' ⊥ (SBC), AD' ⊥ (SDC) ⇒ AB' ⊥ B'C; AD' ⊥ D'C

Vậy các tam giác ABC, ADC, AB'C, AO'C, AC'C đều là tam giác vuông có chung cạnh huyền AC có đỉnh O suy ra OA = OC = OD' = OB' = OC' = OD = OB. Vậy 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' cách đều điểm O cố định với khoảng không đổi $\frac{AC}{2}$

c) Do BC ⊥ (SAB) nên SB là hình chiếu của SC trên (SAB) và do đó $\widehat{BSC} = x$. Ta có:

$$V_1 = V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a^2 . SA \text{ (vì } AB = BC = a).$$

$$V_2 = V_{SAB'C'D'} = \frac{1}{3}S_{SAB'C'D'} . SC'.$$

Do ABCD là hình vuông nên dễ dàng suy ra SB' = SD' và B'D'//BD

Ta cũng có B'D' ⊥ (SAC) ⇒ B'D' ⊥ AC' ⇒ $S_{SAB'C'D'} = \frac{1}{2}AC' . B'D'$.

Ta có SB = BCcotgx = acotgx, $SC = \frac{BC}{\sin x} = \frac{a}{\sin x}$.

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{\cos 2x}}{\sin x} \ ; \quad SB' = \frac{SA^2}{SB} = \frac{a\cos 2x}{\sin x\cos x}$$

$$SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a\cos 2x}{\sin x} \ ; \qquad B'D' = BD.\frac{SB'}{SB} = \frac{a\sqrt{2}\cos 2x}{\cos^2 x}$$

$$V_1 = \frac{a^3\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x} \ ; \quad V_2 = \frac{a^3\cos^2 2x\sqrt{\cos 2x}}{3\sin x\cos^2 x} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\cos x}{\cos^2 2x}$$

22. a) Do H là trực tâm ΔBCD nên BH ⊥ CD.

Mặt khác AH ⊥ (BCD) ⇒ AH ⊥ CD. Vậy CD ⊥ (ABH) ⇒ CD ⊥ AB.

Giả thiết cho AC ⊥ AB ⇒ AB ⊥ (ACD) ⇒ AB ⊥ AD.

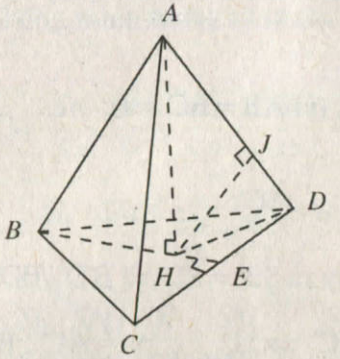
b) Từ AB = AC = AD ⇒ HB = HC = HD, nghĩa là H là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ đều BCD.

Xét tam giác vuông AHD có $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{HD^2}$.

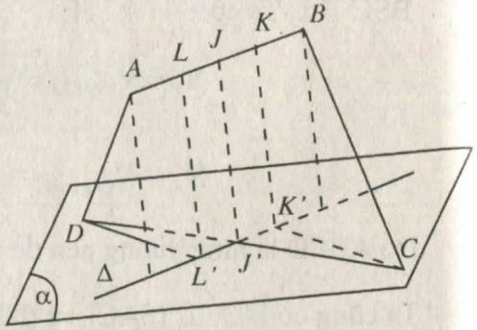
$$\Rightarrow \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{d^2} - \frac{1}{h^2} \Rightarrow HD = \frac{d.h}{\sqrt{h^2 - d^2}}. \ BE = \frac{3}{2}HD = \frac{3dh}{2\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

Gọi x là cạnh đáy tứ diện ABCD thì $BE = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3dh}{2\sqrt{h^2 - d^2}}$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}dh}{\sqrt{h^2 - d^2}}$. Vậy $V = \frac{1}{3} . \frac{x^2\sqrt{3}}{4} . h = \frac{\sqrt{3}d^2h^3}{h^2 - d^2}$.



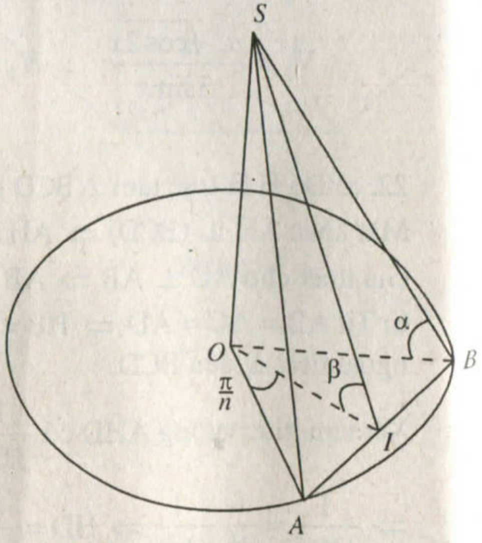
Hình 62



Hình 63

c) Qua CD vẽ (α) // AB. Qua BA vẽ $(\beta) \perp (\alpha)$ và cắt (α) theo giao tuyến Δ // AB.

Gọi I là giao điểm của CD với Δ, vẽ IJ ⊥ AB thì IJ là đường vuông góc chung của AB và CD. Ta có $S_{\Delta CAB} = S_{\Delta DAB} \Rightarrow CK = DL$ trong đó CK ⊥ AB, DL ⊥ AB.



Hình 64

Gọi L' và K' là hình chiếu của L và K trên (α), khi đó L' và K' ∈ Δ và LL' = KK' ⇒ Δ DLL' = Δ CKK' ⇒ DL' = CK' ⇒ ΔIDL' = ΔICK'.

Vậy ID = IC ⇒ đpcm.

23. a) Cho chóp đều đáy là đa giác đều n cạnh. Chia hình chóp đều thành n hình chóp có chiều cao SO có đáy là Δ cân AOB. Biết cạnh AB = a, góc giữa cạnh bên và đáy là $\alpha = \widehat{SBO} = \widehat{SAO}$

Xét Δ AOB có $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$,

Gọi I là trung điểm AO khi đó

$AI = IB = \frac{a}{2}$; $\widehat{IOB} = \frac{\pi}{n}$.

Nếu $OB = \frac{a}{2} : \sin\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \Rightarrow SO = OB.tg\alpha$

Ta tính được thể tích của hình chóp S.OAB là:

$$V = \frac{1}{3} . \left(\frac{1}{2} . \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} . \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} . \sin\frac{2\pi}{n}\right) . \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} tg\alpha$$

$$= \frac{a^3}{24} . \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}} . \cos\frac{\pi}{n} tg\alpha \Rightarrow V_{chóp} = n . \frac{a^3}{24} . \left(1 + \cot g^2\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{n} tg\alpha .$$

Diện tích của Δ SAB $= \frac{1}{2} a . SI = \frac{1}{2} a\sqrt{(OBtg\alpha)^2 + OI^2}$

$$= \frac{1}{2} a\sqrt{\left(\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2\left(tg^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{a^2}{4\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{tg^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{xq} \text{ chóp đều} = \frac{na^2}{4\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{tg^2\alpha + \cos^2\frac{\pi}{n}} .$$

b. Trong trường hợp cho biết AB = a, góc giữa mặt bên và đáy là β. Khi đó $\widehat{ISO} = \beta$. Từ $IB = \frac{a}{2} \Rightarrow OI = IBcotg\frac{\pi}{n} = \frac{a}{2}cotg\frac{\pi}{n}$.

Diện tích đáy Δ OAB sẽ là $\frac{1}{2} a . \frac{a}{2} cotg\frac{\pi}{n} = \frac{a^2}{4}\cot g\frac{\pi}{n}$.

Chiều cao SO của chóp là $OItg\beta = \frac{a}{2}\cot g\frac{\pi}{n} tg\beta$.

$\Rightarrow V_{SOBA} = \frac{a^3}{24}\cot g^2\frac{\pi}{n} tg\beta \Rightarrow Vchóp = \frac{na^3}{24}\cot g^2\frac{\pi}{n} tg\beta$.

Diện tích Δ SAB $= \frac{1}{2} a . SI = \frac{1}{2} . a . \frac{OI}{\cos\beta}$.

Vậy S_{xq} chóp đều n giác là $\frac{na^2}{4\cos\beta}\cot g\frac{\pi}{n}$.

24. Làm tương tự bài 23 chú ý công thức tính diện tích xung quanh và thể tích chóp cụt là:

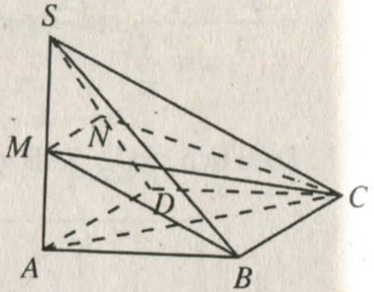
$$S = \frac{1}{2}\text{ chu vi 2 đáy x trung đoạn}$$

$$V = \frac{1}{3}h\,(B + B' + \sqrt{BB'}\,).$$

25. Theo gt: SA là đường cao hình chóp.

a) mp SAD và mặt phẳng thiết diện chứa AD // BC nên chúng cắt nhau theo giao tuyến MN // AD // BC $\Rightarrow$ thiết diện là hình thang.

Lại có AD $\perp$ mpSAB (gt) $\Rightarrow$ MN $\perp$ mp SAD $\Rightarrow$ MN $\perp$ MB nên thiết diện là hình thang vuông tại M và B.



Hình 65

$$\text{dt MNCB} = \frac{1}{2}(BC + MN)BM \qquad (1)$$

Do MN // AD $\Rightarrow \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{MN}{AD} \Leftrightarrow \dfrac{2a-x}{2a} = \dfrac{MN}{b} \Leftrightarrow MN = \dfrac{b(2a-x)}{2a}$

Tam giác vuông BAM cho $BM^2 = MA^2 + BA^2 = x^2 + a^2$.

Thay vào (1) cho: dt (MNCB) $= \dfrac{b(4a-x)}{4a}\sqrt{x^2+a^2}$.

Gọi $V = V_{SABCD}$ thì dễ thấy $V_{SABC} = V_{SACD} = \dfrac{1}{2}V$.

Còn $V_{SMNCB} = V_{SMBC} + V_{SMNC}$ (2)

Ta có: $\dfrac{V_{SMBC}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM.SB.SC}{SA.SB.SC} = \dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2a-x}{2a} = t > 0\ (0 \le x \le 2a)$

$\Rightarrow V_{SMBC} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{1}{2}V.$

$\dfrac{V_{SMNC}}{V_{SACD}} = \dfrac{SM.SN.SC}{SA.SC.SD} = \left(\dfrac{SM}{SA}\right)^2 \Rightarrow V_{SMNC} = \left(\dfrac{SM}{SA}\right)^2.\dfrac{1}{2}V.$

Thay vào (2) được:

$$V_{SMNCB} = \frac{1}{2}V\left[\left(\frac{SM}{SA}\right)^2 + \frac{SM}{SA}\right] = \frac{1}{2}V\text{ (gt)} \Leftrightarrow \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 + \frac{SM}{SA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 1 > 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2a-x}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x = (3 - \sqrt{5})a$ (thoả mãn $0 \le x \le 2a$).

Đáp số: $x = (3 - \sqrt{5})a$.

26. a) HS tự giải

b) Lấy mặt BCD làm đáy, kẻ các đường cao AH và GH′ thì dễ thấy $\dfrac{GH'}{AH} = \dfrac{GA'}{AA'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{GBCD} = \dfrac{1}{4}V_{ABCD}$.

Chứng minh tương tự cho các hình chóp khác theo đầu bài $\Rightarrow$ đpcm.

27. a) Để cho gọn, ta đặt SA = a, SB = b, SC = c. Kẻ SH $\perp$ mp ABC. Coi A là đỉnh, SBC là đáy thì thể tích tứ diện là: $V = \dfrac{1}{6}abc$. (1)

Nếu coi S là đỉnh, ABC là đáy thì thể tích tứ diện là:

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}\,.\,SH$ (2)

Từ (1) và (2) cho: $\dfrac{1}{2}abc = S_{ABC}.SH$ (3)

Mặt khác, ta có: $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \Rightarrow SH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$.

Thay vào (3) cho: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$. (4)

Theo BĐT Bunhiacôpxki, ta có:

$$\left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^2 \le \frac{1}{3}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Thay vào (4).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \ge \frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\, S_{ABC} \ge \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ca$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\, S_{ABC} \ge S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$$ (đpcm)

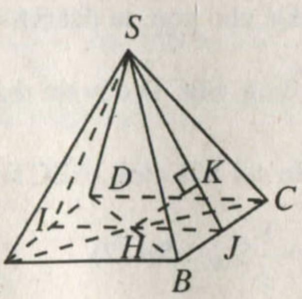
b) Dễ thấy: $V = \frac{1}{6}SA.SB.SC$ (xem (1) của câu a) $\Rightarrow V = \frac{1}{6}ax(k - x)$.

Ta nhận thấy $x + (k - x) = k$ không đổi nên tích $x(k - x)$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = k - x \Rightarrow x = \frac{1}{2}k \Rightarrow SB = SC = \frac{1}{2}k$.

28. a) Kẻ SH ⊥ đáy. Theo tính chất hình chóp đều thì H là giao hai đường chéo đáy: $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông SHA cho $SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}\text{dt}\ \Delta BCD.SH = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

b) Gọi J là trung điểm BC thì SJ ⊥ BC (ΔSBC đều) và HJ ⊥ BC theo định lí ba đường vuông góc ⇒ BJ ⊥ (SIJ) ⇒ (SBC) ⊥ (SIJ). Do đó, kẻ HK ⊥ SJ thì HK ⊥ (SBC) và HK là khoảng cách từ H đến (SBC).



Hình 66

Trong tam giác vuông SHK cho: HK.SJ = SH.HJ

$$\Rightarrow HK = SH\frac{HJ}{SJ} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vì đáy là hình chóp đều nên dễ thấy khoảng cách từ tâm đến các mặt bên bằng nhau.

29. a)

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC \\ \left.\begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC \end{array}\right\}$$

⇒ BC ⊥ (HOA) ⇒ BC ⊥ AH

⇒ AH là một đường cao ΔABC (1)

$$\left.\begin{array}{l} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} OB \perp (CAO) \Rightarrow OB \perp AC \\ OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BOH)$$

⇒ AC ⊥ BH ⇒ BH là một đường cao của ΔABC (2)

Từ (1) và (2) cho thấy H là trực tâm Δ ABC

b) H là trực tâm nện AH ⊥ BC

$$\left.\begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp (BOC) \Rightarrow OA \perp BC \Rightarrow$$

BC ⊥ mp HOA ⇒ BC ⊥ OH (3)

$$\left.\begin{array}{l} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} OB \perp (CAO) \Rightarrow OB \perp AC \\ \text{H là trực tâm, nên } BH \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BOH)$$

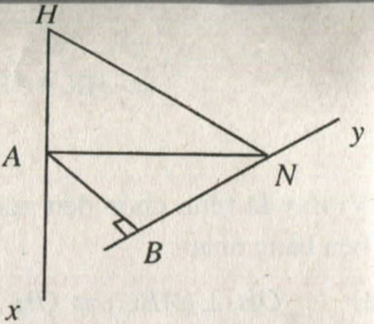
⇒ AC ⊥ OH (4)

Từ (3) và (4) cho OH ⊥ (ABC).

c) Đáp số: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ (5)

d) Ta có $\text{tg}\,\beta = \frac{AI}{BI}$ mà $\frac{AI^2}{BI^2} = \frac{a^2 + OI^2}{b^2 - OI^2}$ (6)

Trong tam giác vuông BOC cho: OI.BC = OB.OC



Hình 67

$\Rightarrow OI = OB.\dfrac{OC}{BC} = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} \Rightarrow$

$OI^2 = \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

Thay vào (6):

$\dfrac{AI^2}{BI^2} = \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^4} \Rightarrow$

b^2 tgB = 2dt ΔABC (theo (6)

Chứng minh tương tự: a^2tgA = 2dt ΔABC, c^2tgC = 2dt ΔABC $\Rightarrow$ đpcm.

30. Đáp số: $V = \dfrac{1}{3}abc$.

31. a) Gọi $\alpha = \widehat{(x, y)}$ với $0 < \alpha \le 1v$.

– Nếu $m = 0 \Rightarrow M \equiv A$ và $k = n^2 \Rightarrow MN^2 = AN^2 =$
$= AB^2 + BN^2 = d^2 + n^2 = d^2 + k$.

– Nếu $n = 0 \Rightarrow N \equiv B$ và $k = m^2 \Rightarrow MN^2 = d^2 + k$.

– Nếu $m, n \ne 0 \Rightarrow MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2 =$
$= (-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})^2 = m^2 + n^2 + d^2 - \underbrace{2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}_{0} - 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN} +$

$+ \underbrace{2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BN}}_{0} = k + d^2 - 2mn.\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = d^2 + k$.

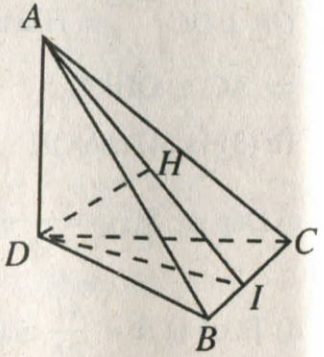
Nếu $mn = 0$.

$MN^2 = d^2 + k - 2mn.\cos\alpha$ nếu $mn \ne 0$ và $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = \alpha$ (1)

$MN^2 = d^2 + k^2 + 2mn.\cos\alpha$ nếu $mn \ne 0$ và $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = 2v - \alpha$ (2)

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của MN:

– Nếu $\alpha = 1v$ thì $\cos\alpha = 0$ và $MN^2 = d^2 + k$ $\forall m, n$ thoả mãn $m^2 + n^2 = k \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của MN bằng giá trị nhỏ nhất của $MN = \sqrt{d^2+k}$



Hình 68

– Nếu $0 < \alpha < 1v$ thì $\cos\alpha > 0$ và $2mn \le m^2 + n^2 = k$ (đẳng thức xảy ra khi $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$ (3) nên $\underbrace{d^2 + k - k\cos\alpha}_{\min} \le d^2 + k - 2mn\cos\alpha <$

(Với đk (1) & (3))

$< \underbrace{d^2 + k}_{MN^2} < d^2 + k + 2mn\cos\alpha \le \underbrace{d^2 + k + k\cos\alpha}_{\max}$.

(Với đk (2) & (0))

b) Do x ⊥ y và AB là đường vuông góc chung của chúng nên AM ⊥ mp(BAN) và ΔBAN vuông ở B.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}$dt ΔBAN.MA $= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}$BA.BN.MA $= \dfrac{1}{6}$ mnd $\le$

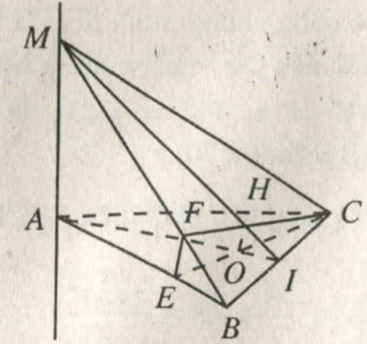
$\le \dfrac{1}{6}d.\dfrac{m^2+n^2}{2} = \dfrac{1}{12}kd$. Dấu = xảy ra khi $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

Đáp số: giá trị lớn nhất của $V = \dfrac{1}{12}kd$ vơi $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

32. a) Gọi d là các đường thẳng vuông góc mp ABC tại A. Vì ΔABC cân đỉnh A nên Δ MBC cân đỉnh M. Kẻ MI ⊥ BC thì I là trung điểm BC $\Rightarrow$ AI ⊥ BC. MI, AI vừa là đường cao, đường trung tuyến của ΔMBC và ΔABC $\Rightarrow$ G, H là trọng tâm, trực tâm, ΔMBC thuộc MI. Theo tính chất trọng tâm ΔMBC: $\dfrac{GI}{MI} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{IM} \Rightarrow$ G là ảnh của M trong phép vị tự tâm I, tỉ số $\dfrac{1}{3} \Rightarrow$ M chạy trên d thì G chạy trên đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d trong phép vị tự tâm I, tỉ số $\dfrac{1}{3}$: d' ⊥ (ABC) tại trọng tâm ΔABC, d'//d.

Quỹ tích trực tâm H: (HS tự làm)

b) Do d ⊥ mp ABC nên mp MAI ⊥ mp ABC, kẻ HK ⊥ AI thì HK ⊥ mp ABC nên HK là đường cao hình chóp HOBC, có



Hình 69

$V = \frac{1}{3}\text{dt}(\Delta BOC).HK.$

Nhưng ΔBOC cố định nên V lớn nhất khi HK dài nhất $\Rightarrow HK = \frac{1}{2}OI$

(OI là đường kính đường tròn ngoại tiếp ΔHOI (theo câu trên).

33. a) Đáp số: $S_{tp} = a^2(1 + \sqrt{3})$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

b) Gọi M là trung điểm SA, theo giả thiết các mặt bên là các tam giác đều $SA \perp BM$, $SA \perp DM \Rightarrow \widehat{BMD}$ là góc phẳng của nhị diện $[(SAB),(SAD)]$.

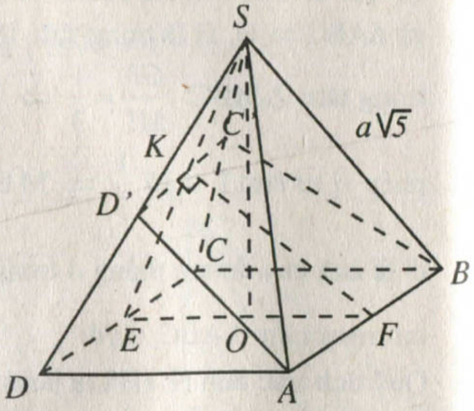
Ta có $MB = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DB = a\sqrt{2}$. Áp dụng định lí cosin vào ΔBMD:

$$DB^2 = MB^2 + MD^2 - 2MB.MD\cos\widehat{BMD}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{BMD} = \frac{MB^2 + MD^2 - DB^2}{2MB.MD} = \frac{1}{3}$$

34. Gọi F, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD. K là hình chiếu của F trên SE, dễ thấy $DC \perp (SEF) \Rightarrow FK \perp DC$ nên $FK \perp (SDC) \Rightarrow (ABK)$ là mặt phẳng qua AB và vuông góc (SDC) và $D'C = (ABK) \cap (SDC)$. Thiết diện ABC'D' là hình thang cân.

Dễ dàng chứng minh SEF là tam giác đều ($SF = EF = SE = 2a$) $\Rightarrow$ $D'C' = a$, $FK = a\sqrt{3}$, ta có $AB = 2a$. (h. 70).



Hình 70

Vậy diện tích thiết diện ABC'D': $\text{dt}ABC'D' = \frac{1}{2}(AB + D'C)$.

$$FK = \frac{3a}{2}a\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

b) Dễ dàng chứng minh được $SK \perp (ABC'D')$.

Vậy $V_{S.ABC'D'} = \frac{1}{3}SK.\text{dt}ABC'D' = \frac{1}{3}a\frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Gọi O là tâm đáy, khi đó SO là đường cao của hình chóp đều S.ABCD và SO cũng là đường cao của tam giác đều SEF cạnh bằng 2a, nên $SO = a\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}2a.2a.a\sqrt{3} = \frac{4}{3}.\sqrt{3}a^3$.

Do đó $V_{ABCDD'C'} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABC'D'} = \frac{4}{3}.\sqrt{3}a^3 - \frac{\sqrt{3}a^3}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}a^3$.

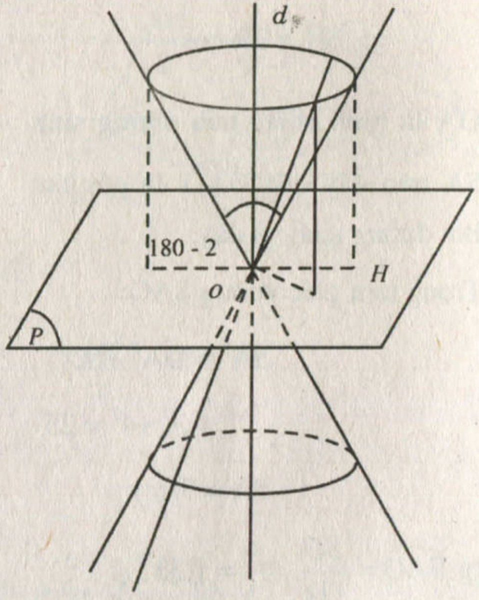
35. Xét đường 1 bất kì đi qua O và $(l; P) = \alpha$, lấy M bất kỳ trên l, hạ $MH \perp mp(P)$

$\Rightarrow \widehat{MOH} = \alpha$

Đường thẳng $d \perp mp(P)$ tại O cố định, $d \perp OH$.

$\Rightarrow (d; \ell) = 90^0 - \alpha$

Vậy ℓ luôn tạo với d một góc $90^0 - \alpha$ không đổi và đi qua điểm O cố định $\in d \Rightarrow$ ℓ thuộc mặt nón tròn xoay có trục là d và góc ở đỉnh $\beta = 2(d; \ell) = 180^0 - 2\alpha$, và đỉnh của mặt nón là O.



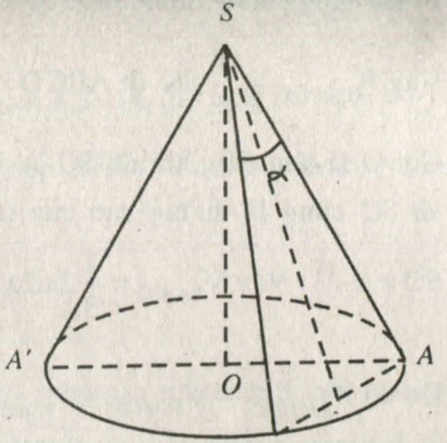
Hình 71

36. Nếu $\widehat{SAO} = 30^0 \Rightarrow SO = \frac{SA}{2} = 2{,}5$

$$OA = \frac{SA\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Vậy diện tích thiết diện qua trục là:

$$OA.SO = 2,5.\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{12,5\sqrt{3}}{2}\ (m^2)$$



Hình 72

37. Thiết diện qua trục là tam giác đều, vậy SA = SB = 2R.

Kẻ SH ⊥ AB, trong tam giác vuông SAH:

$$SH = SA\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow SH = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$$

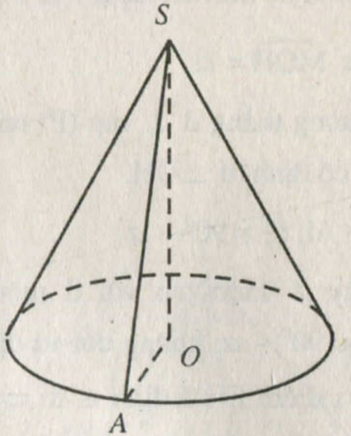
38. OA là hình chiếu của đường sinh SA trên đáy nên $\widehat{SAO}$ là góc tạo bởi đường sinh và đáy.

Trong tam giác vuông SAO:

$$SA^2 = OA^2 + SO^2$$

$$= 3^2 + 4^2 = 25$$

$$SA = 5(m)$$



Hình 73

$$tg\ \widehat{SAO} = \frac{SO}{OA} = \frac{4}{3} = 1,333$$

$\widehat{SAO} \approx 53,13^0$.

b. Theo công thức tính diện tích xung quanh hình nón: $S_{xq} = \pi rl$.

Ở đây r = OA = 3m, l = SA = 5m. Vậy $S_{xp} = \pi\ .\ 3.\ 5 = 15\pi\ (m^2)$.

c. Theo công thức tính thể tích khối nón: $V = \pi.r^2h$.

Ở đây r = OA =3m, h = SO = 4m ⇒ $V = \pi.3^2.4$.

$V = 36\pi\ (m^3)$.

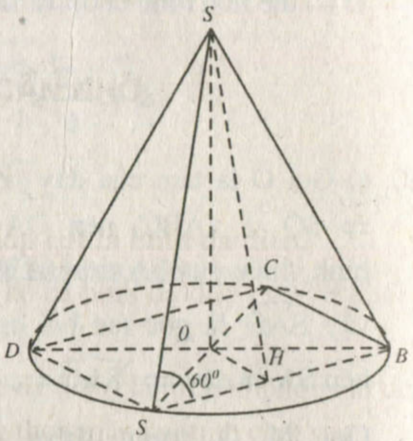
39. a) S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD có các cạnh bên SA = SB = SC = SD (vì là các đường sinh của hình nón) suy ra đường cao SO của hình nón cũng là đường cao SO của hình chóp, mà O là tâm của đường tròn đáy cũng là tâm của hình vuông ABCD. Vậy S.ABCD là hình chóp đều.

b) SAB là tam giác đều cạnh a (vì SAB là tam giác cân và $\widehat{SAB} = 60^0$(gt)

Gọi H là trung điểm của AB thì

$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (SH là đường cao của tam giác SAB đều cạnh a).

Dễ dàng có $OH = \frac{a}{2}$



Hình 74

Trong tam giác vuông SOH có:

$$SO^2 = SH^2 - OH^2$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Theo công thức tính thể tích hình chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$

Ở đây $B = S_{ABCD} = a^2$; $h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy thể tích hình chóp S.ABCD là $V = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$

c) Theo công thức tính thể tích hình nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2h$$

Ở đây $r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$h = SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.a^3$$

Tỉ số thể tích hình chóp và hình nón là:

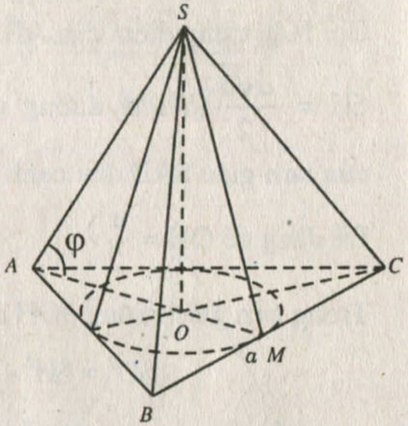
$$K = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 : \frac{\sqrt{2}}{12}\pi.a^3 = \frac{2}{\pi}$$

40. a) Gọi O là tâm của đáy ABC $\Rightarrow SO \perp (ABC)$ nên OA là hình chiếu của SA trên (ABC), vậy $\widehat{SAO}$ là góc tạo bởi cạnh bên SA và đáy $\Rightarrow \widehat{SAO} = \varphi$.

Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$OA = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$OM = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



Hình 75

Rõ ràng SM là đường sinh của hình nón.

Dễ dàng tính được $SO = OA\,tg\varphi \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}tg\varphi$.

Trong tam giác vuông SOM ta có $SM^2 = SO^2 + OM^2 = \frac{a^2}{3}tg^2\varphi + \frac{a^2}{12}$

$$\Rightarrow SM^2 = \frac{3a^2\left(4tg^2\varphi + 1\right)}{36}$$

$$SM = \frac{a}{6}\sqrt{3\left(4tg^2\varphi + 1\right)}$$

Theo công thức tính diện tích xung quanh hình nón:

$$Sxq = \pi r \ell$$

Ở đây $r = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $\ell = SM = \frac{a}{6}\sqrt{3\left(4tg^2\varphi + 1\right)}$

Vậy $$Sxq = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a}{6}\sqrt{3\left(4tg^2\varphi + 1\right)}$$

$$= \frac{\pi a^2}{12}.\sqrt{4tg^2\varphi + 1}$$

b. Gọi thể tích hình nón là V_1, thể tích hình chóp đã cho là V_2.

Ta có $V_1 = \frac{1}{3}\pi.r^2h$.

Ở đây r = OM, h = SO nên $V_1 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{3}tg\varphi$.

$$V_1 = \frac{\pi.a^3\sqrt{3}tg\varphi}{108}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}Bh$$

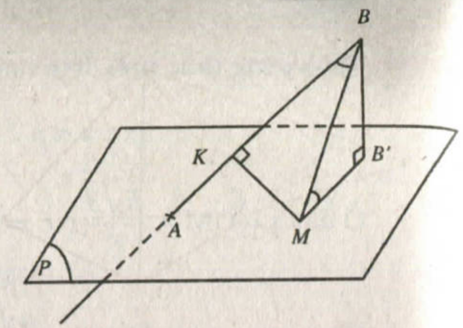
Ở đây $B = S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (ΔABC đều cạnh a), h = SO

Vậy $V_2 = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{3}tg\varphi = \frac{a^3tg\varphi}{12}$

Do đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}tg\varphi}{108} : \frac{a^3tg\varphi}{12} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$

41. Xét điểm M bất kì ∈ mp (P) thoả mãn điều kiện $\widehat{ABM} = \widehat{BMB'}$.

Nối M B' ⇒ BB' ⊥ MH ⇒ Δ BMH vuông tại B', hạ MK ⊥ AB tại K ⇒ Δ BMB' = Δ MBK vì có MB chung và $\widehat{B_1} = \widehat{M_1}$ ⇒ MK = BB' không đổi (vì B và mp P cho trước) ⇒ khoảng cách từ M đến AB không đổi. Vậy M thuộc mặt trụ có trục là đường AB và bán kính R = BB'.



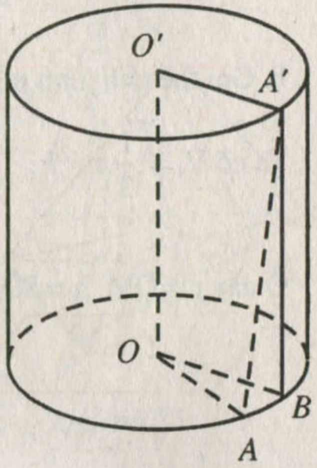
Hình 76

42. HD: Muốn xác định góc của hai đường thẳng chéo nhau a và b thông thường ta lấy một điểm A ∈ a, từ A kẻ b' // b thì góc giữa hai đường thẳng a và b' chính là góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Giải:

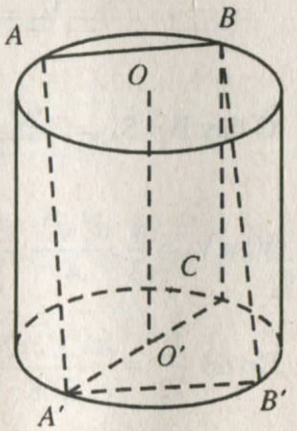
Dựng đường sinh A'B ⇒ OO'//A'B. Vậy góc giữa AA', OO' chính là $\widehat{AA'B}$.

Không khó khăn lắm ta tính được AB = 2Rsin 15^0 ⇒ tg$\widehat{AA'B}$ = 2 sin15^0 ⇒ $\widehat{AA'B}$ = 27^{0}27'.



Hình 77

43. Giả sử có hình vuông ABB'A' nội tiếp hình trụ (h78). Từ B dựng đường sinh BC, vậy BC ⊥ (O'), CB' là hình chiếu của BB' trên đáy, mà A'B' ⊥ BB' (định lí ba đường vuông góc) ⇒ tam giác A'B'C vuông tại B'.



Hình 78

Đặt cạnh hình vuông AB = BB' = A'B'= AA' = x

Ta có: 4R^2 – x^2 = x^2 – h^2 (R là bán kính đáy, h là chiều cao hình trụ)

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4R^2 + h^2}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{4R^2 + h^2}{2}}$$

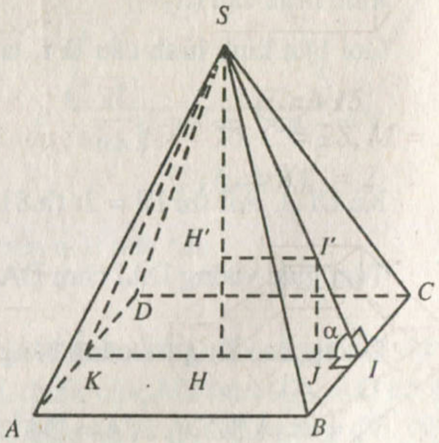
$$x = \sqrt{\frac{196 + 4}{2}} = 10(m).$$

44. Tiếp diện của hình trụ là mặt phẳng chỉ chứa một đường sinh của hình trụ.

Ta đã biết các đường sinh của hình trụ song song với nhau, bởi vậy hai tiếp diện của hình trụ mặc nhiên chứa hai đường thẳng song song. Vậy giao tuyến của chúng nếu có thì song song với đường sinh và song song với trục của hình trụ.

45. Dễ dàng xác định góc phẳng của nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy, đó là góc SIH = α (I là trung điểm của BC).

Hình trụ nội tiếp hình chóp tứ giác đều có trục là đường cao SH của hình chóp, đáy dưới thuộc đáy hình chóp, đáy trên nội tiếp hình vuông thuộc mp song song với đáy dưới, tiếp xúc với cạnh hình vuông tại trung điểm của nó, điểm này cũng thuộc trung đoạn của mặt bên hình chóp, như I' ∈ SI chẳng hạn.



Hình 79

Theo đầu bài: HH' – H'I', và IJ = HI – HJ.

Tam giác vuông I'JI cho: IJ = I'J cotg α

$$\Leftrightarrow \text{HI} - \text{HJ} = \text{HJ cotg}\,\alpha \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}\text{a} = \text{HJ}(1 + \text{cotg}\,\alpha\,)$$

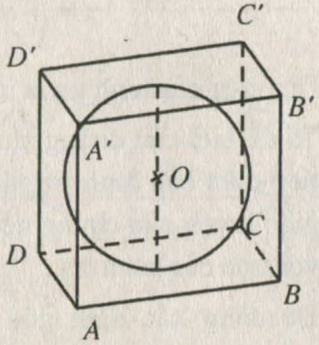
$$\Rightarrow HJ = \frac{a}{2(1+\cot g\alpha)}$$

$$V = \pi HJ^3 = \frac{\pi a^3}{8(1+\cot g\alpha)^3}.$$

Biến đổi: $1+\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}\sin(45^0+\alpha)}{\sin\alpha}$

Thay vào V được đpcm.

46. Hình chiếu của hình cầu trên đáy dưới hình lăng trụ là một đường tròn nội tiếp đáy hình lăng trụ. Đường tròn này có tâm là hình chiếu của tâm hình cầu trên đáy dưới (trùng với giao hai đường chéo đáy), có bán kính bằng bán kính hình cầu (h 80)



Hình 80

Gọi bán kính hình cầu là r, ta có:

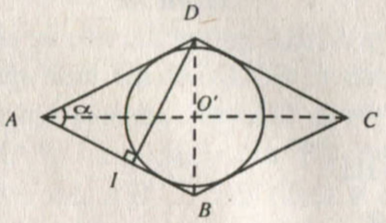
$V = \dfrac{4}{3}\pi . r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$.

Kẻ DI ⊥ AB thì DI = 2r (h.81)

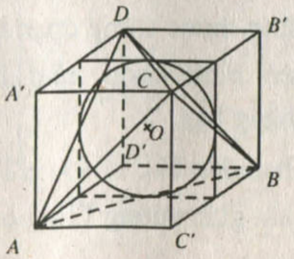
Tam giác vuông DAI cho: $DA = \dfrac{DI}{\sin\alpha} = \dfrac{2.r}{\sin\alpha}$

Đường cao lăng trụ cũng bằng đường kính hình cầu là 2r (h.82)

$V_{lt} = dt\,(ABCD)\,.\,A'A = DA^2\sin\alpha\,.2.r = \dfrac{8.r^3}{\sin\alpha} = \dfrac{6V}{\pi.\sin\alpha}$.



Hình 81



Hình 82

47. Hình 82 cho tứ diện đều ABCD cạnh a và cũng tạo được hình lập phương chứa tứ diện đều này (xem bài 2, chương IV: Khối đa diện). Hình cầu tiếp xúc với các cạnh của tứ diện đều này sẽ nội tiếp hình lập phương, tức là tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các mặt và do đó tiếp xúc các cạnh của tứ diện đều tại trung điểm các cạnh (hình 194). Như vậy đường kính hình cầu bằng cạnh hình lập phương có đường chéo bằng a (cạnh tứ diện đều) ⇒ cạnh hình lập phương bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó bán kính hình cầu bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

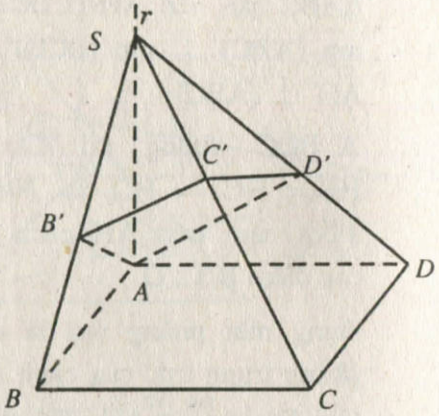
48. (SAB) ⊥ (ABCD) (do SA ⊥(ABCD)) AB = (SAB) ∩ (ABCD) mà BC ⊥ AB; BC ⊂ (ABCD) ⇒ BC ⊥ AB'

Mặt khác AB' ⊥ SC

AB' ⊥ BC (chứng minh trên)

⇒ AB' ⊥ (SBC) ⇒ AB' ⊥ B'C

Tương tự AD' ⊥ D'C, AC' ⊥ SC ⇒ $\widehat{ABC} = \widehat{AB'C} = \widehat{AC'C} = \widehat{AD'C}$ $= \widehat{ADC} = 90^\circ$.



Hình 83

Vậy A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu.

49. a) và b) Học sinh tự làm.

c) Do ΔABC vuông tại A và O là trung điểm BC. Qua A, dựng mp (Q) ⊥d tại I (I ∈ d). AI là hình chiếu của AO trên (Q). AO có độ dài không đổi, (Q) cố định, d cố định nên AI có độ dài không đổi. Như vậy, mp (Q) cắt mặt cầu (O) nói ở câu a theo đường tròn (𝒞) tâm I, bán kính IA, thuộc (Q). Đảo lại, nếu lấy bất kì điểm M∈ (𝒞) thì IA =IM ⇒ OA = OM ⇒ M ∈ mặt cầu (O).

d) Khi góc vuông $\widehat{xOy}$ quay quanh O thì M chạy trên d ⇒ đường thẳng Δ chạy trên mp (Q) chứa (d) và (Q) ⊥P, mp trung trực R của SO cố định ⇒ I ∈ Δ' (là giao tuyến của (R), (Q), Δ' //d và cách d một khoảng bằng $\dfrac{1}{2}$SO).

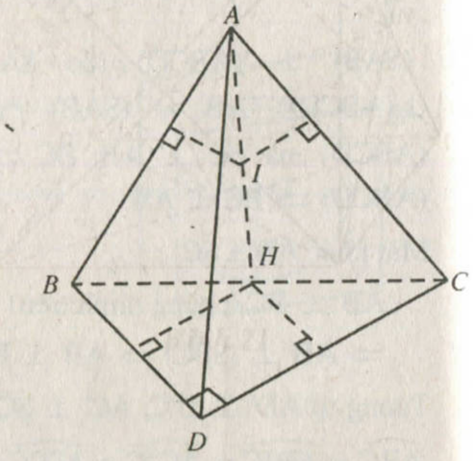
Đảo lại, lấy một điểm bất kì I ∈ Δ' ⇒ I ∈ (R) và I cách đều S, O. Mặt cầu (I) bán kính SI = OI cắt (d) ở A và B. Từ I kẻ một đường thẳng song song SO cắt (d) ở M. Do OI = IA = IB và MI ⊥ (P) nên MO = MA = MB ⇒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ BOA ⇒ $\widehat{AOB}$ = 1v. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB với $\widehat{AOB}$ = 1v.

Kết luận: Quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB là đường thẳng Δ', giao của hai mp (R) và (Q).

50. Gọi H là trung điểm của BC, ΔABC cân nên AH ⊥ BC mà mp (ABC) ⊥ mp (BCD) ⇒ AH ⊥ (ABC)

Δ BDC vuông tại D ⇒ HB = HC = HD ⇒ Những điểm nằm trên AH cách đều các điểm B, C, D.

Dựng mặt phẳng (α) là mặt phẳng trung trực của cạnh AB. Gọi O = (α) ∩ AH. Thì ta có OA = OB = OC = OD, nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.



Hình 84

Gọi R là bán kính mặt cầu này thì R = OA = OB = OC nên R chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp Δ ABC.

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ABH ta có:

$AH^2 = AB^2 - BH^2$ mà AB = a, BC = b, $BH = \frac{b}{2}$

Và $AH^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{4}b.\sqrt{4a^2 - b^2}\ (S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH)$$

Nếu tam giác có độ dài 3 cạnh là a, b, c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó thì $S = \frac{a.b.c}{4R}$.

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có $S_{ABC} = \frac{a^2.b}{4R}$

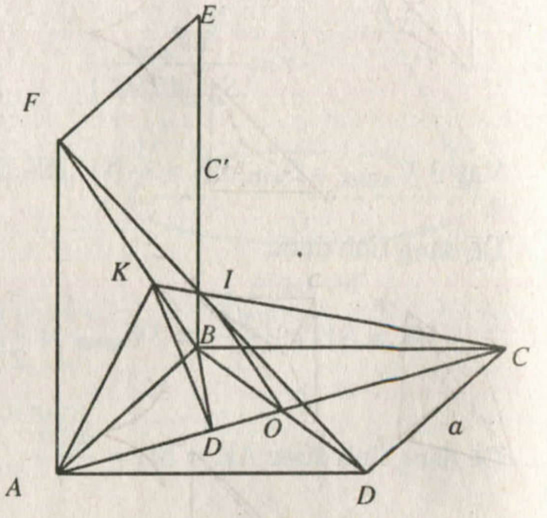
Vậy ta có $\frac{a^2b}{4.R} = \frac{1}{4}b.\sqrt{4a^2 - b^2} \Rightarrow R = \frac{a^2.b}{b.\sqrt{4a^2 - b^2}} \Rightarrow R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

51. 1. Gọi O = AC ∩ BD nên O là trung điểm của AC và DB.

Mặt phẳng chứa AC và song song với BF cắt mặt phẳng (BDF) theo giao tuyến OI // BF mà O là trung điểm của BD ⇒ I là trung điểm FD

$\Rightarrow \frac{DI}{DF} = \frac{1}{2}$

2. Trong tam giác ABF kẻ AK ⊥ BF, trong tam giác ABC kẻ BH ⊥ AC. Do BF ⊥ AC (gt), BF ⊥ AK ⇒ BF ⊥ mp (AKC) ⇒ BF ⊥ HK, cũng chứng minh tương tự ta có AC ⊥ mp (BHF) ⇒ AC ⊥ HK.



Hình 85

Vậy HK là đường vuông góc chung của AC và BF.

Trong tam giác vuông ABF ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow AK^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác vuông ABC ta có $AH.AC = AB^2$

Mà AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ ⇒ $AH = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông AKH vuông ở H ta có:

$$HK^2 = AK^2 - BH^2$$

$$HK^2 = \frac{2a^2}{3} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{3} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

3. Mặt cầu nội tiếp tứ diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của tứ diện. Gọi r là bán kính của mặt cầu nội tiếp tứ diện ABHK thì ta có:

$$r = \frac{3.V_{ABHK}}{S_{tp}(ABHK)}$$

Vậy $3\,V_{ABHK} = S_{AHK}.BK = \frac{1}{2}AH.HK.BK.$

Dễ dàng tính được:

$$BK = AH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3V_{ABHK} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{18}.a^3$$

Dễ dàng tính được $AK = BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$S_{AHB} = \frac{1}{2}AH.HB = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2.\sqrt{2}}{6}$$

$$S_{KHB} = \frac{1}{2}BK.HK = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{6}$$

$$S_{AKB} = \frac{1}{2}AK.BK = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2.\sqrt{2}}{6}$$

$$S_{AHK} = \frac{1}{2}AH.HK = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{6}$$

Vậy $Stp = S_{AHB} + S_{KHB} + S_{AKB} + S_{AHK}$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{6} + \frac{a^2}{6} + \frac{a^2\sqrt{2}}{6} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{3}$$

Do đó $r = \frac{\sqrt{3}.a^3}{18} : \frac{a^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{3} = \frac{a\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}{6}$

52. Theo công thức tính diện tích xung quanh hình nón:

$$S_{xq} = \pi.\ell.r$$

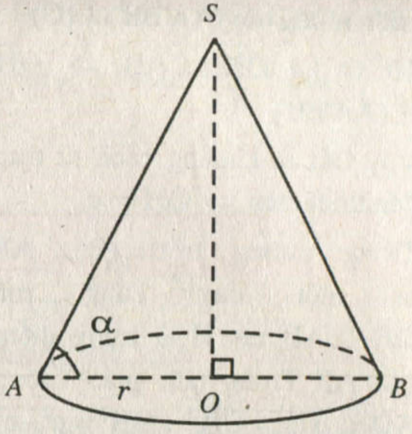
Ở đây $r = OA$, $\ell = SA$

Theo giả thiết OA = r

Trong tam giác vuông SOA:

$$SA = \frac{OA}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Vậy $S_{xq} = \pi.r.\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{\pi.r^2}{\cos\alpha}$



Hình 86

Đáp án A đúng.

53. Theo công thức tính thể tích khối nón:

$$V = \frac{1}{3}\pi.r^2h$$

Ở đây r = OA, h = SO

Theo giả thiết OA = r

Trong tam giác vuông SOA: $SO = OA\,tg\alpha = r.tg\alpha$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.r.tg\alpha = \frac{1}{3}\pi.r^3tg\alpha$

Đáp án A đúng

54. Theo công thức tính diện tích xung quanh hình trụ:

$$Sxq = 2.\pi.r.h$$

Đáp án D đúng.

55. Thể tích khối trụ là: $V = \pi.r^2.h$

Đáp án B đúng.

56. Mặt phẳng song song với trục OO' nên cắt hình trụ theo một thiết diện là một hình chữ nhật AA'BB' (h.87).

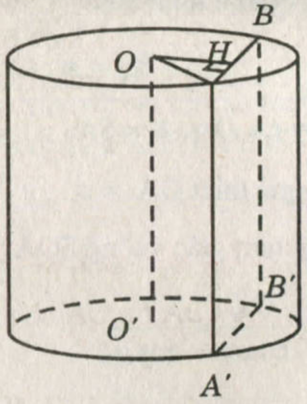
Hiển nhiên mp (AA'BB') ⊥ (O)

Từ O kẻ OH ⊥ AB ⇒ OH ⊥ (AA'BB')

Vậy OH là khoảng cách từ trục đến thiết diện ⇒ OH = c.

Trong đường tròn (O), AB là một dây cung mà OH ⊥ AB ⇒ H là trung điểm của AB Trong tam giác vuông AOH: $AH^2 = OA^2 - OH^2 = a^2 - c^2$

$AH = \sqrt{a^2 - c^2} \Rightarrow AB = 2.\sqrt{a^2 - c^2}$



Hình 87

Do đó diện tích thiết diện AA'BB' là:

$$S_{AA'BB'} = 2.\sqrt{a^2 - c^2}.b = 2b.\sqrt{a^2 - c^2}$$

Đáp án D đúng.

57. a. Xác định thiết diện (h.88)

AB là hình chiếu của SB trên đáy mà AB ⊥ BC (gt) nên SB ⊥ BC theo định lí ba đường vuông góc ⇒ BC ⊥ mp (SAB) ⇒ BC ⊥ AB' (1). Do SC ⊥ mp AB'C'D' ⇒ SC ⊥ AB'(2). Từ (1) và (2) suy ra AB' ⊥ mp(SBC)

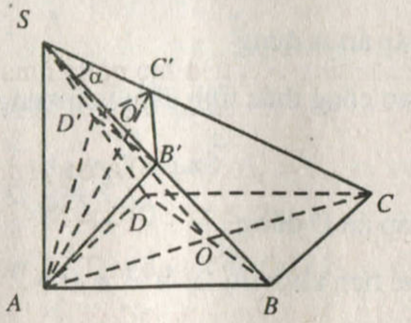
$$\Rightarrow AB' \perp B'C' \Rightarrow \widehat{AB'C'} = 1v.$$

Chứng minh tương tự góc AD'C' = 1v.

b) mp (AB'C'D') luôn luôn đi qua một đường thẳng cố định.

Xác định bảy điểm cùng thuộc mặt cầu (xem ví dụ 2, câu 4, trang 67.

c) Vì BC ⊥ mp (SAB) nên SB là hình chiếu của SC trên mp (SAB) ⇒ $\widehat{BSC}$ là góc tạo bởi SC và mp (SAB): $\widehat{BSC} = \alpha$



Hình 88

Vì ABCD là hình vuông nên mp (SAC) là mp đối xứng của hình chóp S_{ABCD}, suy ra:

$$V_{SAB'C'} = V_{SAD'C'} = \frac{1}{2} V_{SAB'C'D'}; V_{SABC} = V_{SADC} = \frac{1}{2} V_{SABCD}$$

Do đó: $\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{V_{SAB'C'}}{V_{SABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC}$

$$= \frac{SB'.SB}{SB^2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SB^2}.\frac{SA^2}{SC^2} (*)$$

Gọi cạnh hình vuông là a, tam giác vuông SBC cho:

$$SB = BC \cot g\alpha = a \cot g\alpha, \ SC = \frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Áp dụng định lí pitago vào tam giác vuông SAC cho:

$$SA^2 = SC^2 - AC^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha} - 2a^2 = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}(1 - 2\sin^2\alpha) = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}\cos 2\alpha$$

Thay vào (*) được: $\dfrac{V_{SAB'C'D'}}{V_{SABCD}} = \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

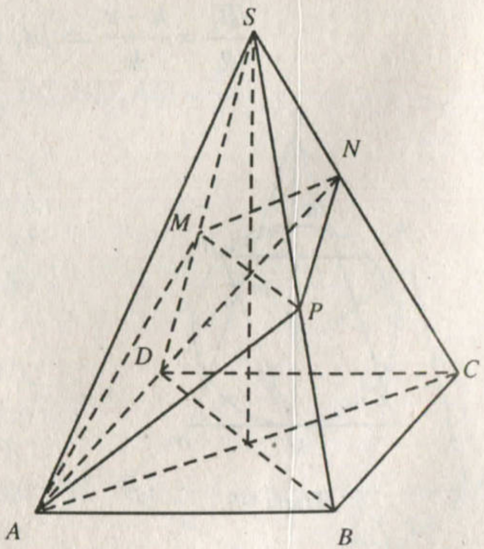
58. a) Tâm và bán kính hình cầu.

Vì SO là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD nên tâm hình cầu ngoại tiếp trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác SAC.

Do đó: $R = IA = \dfrac{2}{3} a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

b) Vì BD ⊥ mp (SAC) nên BD // (α) cắt mặt chéo (SBD) theo giao tuyến MP // BD. Lúc đó thiết diện giữa (α) với hình chóp là tứ giác AMNP.



Hình 89

Vì BD ⊥ mp(SAC) ⇒ BD ⊥ AN ⇒ MP ⊥ AN ⇒ $S_{AMNP} = \frac{1}{2}MP.AN$

Ta có: $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì ΔSMP đồng dạng với ΔSDB nên:

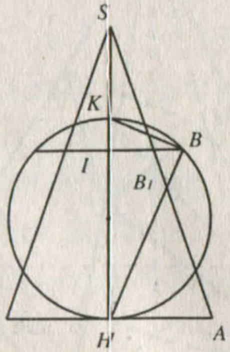
$$\frac{MP}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow MP = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\,(BD = AC = a).$$

Vậy $S_{AMNP} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}a^2.\sqrt{3}$ (đvdt)

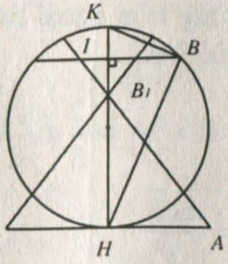
59. Hình cầu S(O; R) và hình nón cùng đặt trên mặt phẳng (P). Để tính toán cho dễ dàng ta tịnh tiến sao cho chân đường cao H của hình nón trùng với tiếp điểm của hình cầu (S) và (P). (hình 90)

Mặt phẳng (Q) song song với (P) cắt hình nón và hình cầu theo các thiết diện lần lượt là đường tròn bán kính IB_1 và IB. Theo giả thiết ta có IH = x, từ các tam giac vuông đồng dạng SIB_1 và SHA ta có:

$$\frac{IB_1}{R} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow IB_1 = \frac{R(h-x)}{h}$$



Hình 90



Hình 91

Từ tam giác vuông HBK vuông tại B ta có:

$$IB^2 = IK\,.\,IH = (2R - x)x.$$

Gọi y là tổng diện tích hai thiết diện, ta có:

$$y = \pi IB_1^2 + \pi IB^2 = \pi.\frac{R^2(h-x)^2}{h^2} + \pi(2R-x)x$$

$$= \pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 + (2R-x)x\right](*)$$

Trong trường hợp h < x < 2R (h.138), chứng minh tương tự như trên ta được $IB_1 = \frac{R}{h}(x-h)$ và $IB^2 = (2R - x)x$. Do đó biểu thức(*) vẫn đúng.

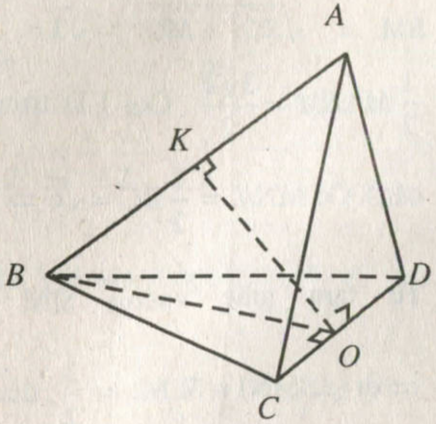
60. a) Ta nhận thấy $BC^2 + BD^2 = CD^2$ nên theo định lí đảo của Pitago thì Δ BCD vuông ở B. Kẻ AO ⊥ mp (BCD). Do AB = AC = AD ⇒ OA = = OB = OC ⇒ O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD, mà Δ BCD vuông ở B nên O là trung điểm CD và OB = OC = OD = a. ΔACD cân đỉnh A nên OA ⊥ CD ⇒ CD ⊥ mp (BAO) ⇒ CD ⊥ AB (h. 92).

Do ΔBCD = Δ ACD (ccc) ⇒ BO = AO = a ⇒ ΔBAO cân đỉnh O. Kẻ OK ⊥ AB thì K là trung điểm AB và OK là đường vuông góc chung của CD và AB.

b) $V = \frac{1}{3}dt.(\Delta BCD).AO = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.BD.AO = \frac{1}{3}a^3$.

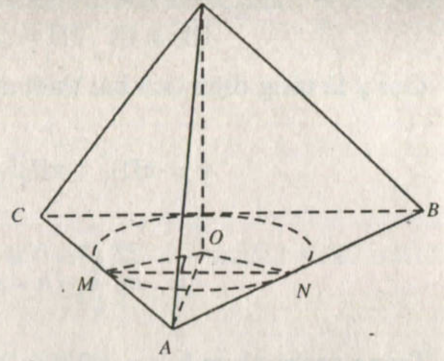
c) Theo các chứng minh trên ta có OA = OB = OC = OD = a ⇒ O cách đều các đỉnh của tứ diện ABCD ⇒ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ⇒ O ≡ I.

d. Theo đầu bài: HI ⊥ mp(ABC), lại có IA = IB = IC = bán kính mặt cầu (I) nên HA = HB = HC ⇒ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, mà ΔABC đều nên H cũng là trực tâm ΔABC (đpcm).



Hình 92

61. $V_{SAMN} = \frac{1}{3}dt(\Delta AMN).SO$



Hình 93

Có $AM = AN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{6}$

$\Rightarrow dt(\Delta NAM) =$

$= \frac{1}{2}MA.NA.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi hình cầu nội tiếp hình chóp SAMN là $(O_1; r)$. Lấy O_1 làm đỉnh, các mặt của hình chóp làm đáy thì các đường cao của các hình chóp này là khoảng cách từ O_1 đến các mặt của hình chóp SAMN, nó chính bằng r. Như vậy:

$V_{SAMN} = \frac{1}{3}r(dt(\Delta NAM) + dt(\Delta SAM) + dt(\Delta SAN) + dt(\Delta SMN))$ (*)

Dễ thấy chân O của đường cao SO cũng là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (vì hình chóp SBAC đều) (hình 93) $\Rightarrow OM \perp AC$, $ON \perp AB$, $SM \perp AC$ và $SN \perp AB$, $MO = NO = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} (a = 2\sqrt{6})$.

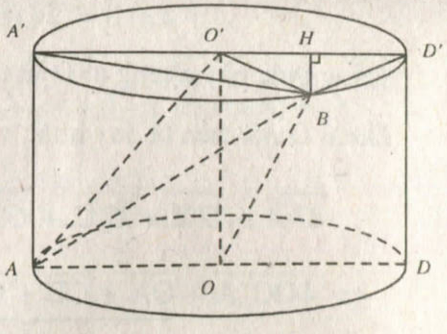
Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông SOM cho:

$SM = \sqrt{SO^2 + MO^2} = \sqrt{3} = SN \Rightarrow dt(\Delta SAM) = dt(\Delta SAN) = \frac{1}{2}MA.SM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Gọi I là trung điểm MN thì $SI \perp MN$ (vì ΔSMN cân). Có MN// $= \frac{1}{2}BC = \sqrt{6} \Rightarrow MI = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Từ tam giác vuông SIM ta có: $SI = \sqrt{SM^2 - MI^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow dt(\Delta SMN) = SI.MI = \frac{3}{2}$, thay vào (*) ta có $r = \frac{2\sqrt{3}}{2 + 3\sqrt{2}}$.

62. Kẻ đường kính AA', gọi D là điểm đối xứng với A' qua O', H là hình chiếu của B trên A'D'.



Hình 94

Do $\left.\begin{matrix} BH \perp A'D \\ BH \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \perp (AOO')$

Vậy BH là đường cao của tứ diện AOO'B, suy ra $V_{AOO'B} = \frac{1}{3}S_{AOO'}.BH$

Dễ dàng tính được $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$

Trong tam giác vuông AA'B, ta có:

$$A'B^2 = AB^2 - AA'^2$$

$$= (2a)^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$$

Trong tam giác vuông A'BD, ta có:

$$BD^2 = A'D^2 - A'B^2$$

$$= (2a)^2 - 3a^2 = a^2$$

$$\Rightarrow BD = a.$$

Suy ra $\Delta O'BD$ là tam giác đều cạnh a, BH là đường cao

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do đó thể tích của tứ diện AOO'B là:

$$V_{AOO'B} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

63. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD. Với mọi điểm O, ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = 2(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$$

Đẳng thức này chứng tỏ O là trung điểm của EF.

Điểm O nói trên là duy nhất, vì giả sử có điểm O' ≠ O và

$$\overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{O'C} + \overrightarrow{O'D} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OO'A} + \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}_{\vec{0}} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OO'} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv O'$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = 2\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{O'E} + \overrightarrow{O'F} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{O'O} = \vec{0} \Rightarrow O' \equiv O$$

64. 1) Từ đầu bài cho: $\overrightarrow{A'A} = k\overrightarrow{A'B}$ (k ≠ 1)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA'})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$$

Bằng cách tương tự:

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}}{1-k};\ \overrightarrow{OC'} = \frac{\overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OD}}{1-k};$$

$$\overrightarrow{OD'} = \frac{\overrightarrow{OD'} - k\overrightarrow{OD}}{1-k} \quad (1)$$

Suy ra: $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'} =$

$$\frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} - k\overrightarrow{OA}}{1-k}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \text{ (đpcm)}$$

2. Nếu A', B', C', D' đồng phẳng thì ta luôn có các số thực p, q, r với p + q + r = 1 thoả mãn $\overrightarrow{OA'} = p\overrightarrow{OB'} + q\overrightarrow{OC'} + r\overrightarrow{OD'}$ (2)

65. Có $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2} = 2$

Gọi $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}|$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{c^2} = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \overrightarrow{a^2} - \overrightarrow{b^2} + 2\vec{a}\vec{b} = 3 + 1 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 30^0 = 7$$

Tương tự: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow |\vec{d}| = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = \overrightarrow{a^2} + \overrightarrow{b^2} - 2\vec{a}\vec{b} = 1$

$$\cos(\vec{c}, \vec{d}) = \frac{\vec{c}\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow (\vec{c}, \vec{d}).$$

66. $\overrightarrow{CA} = (2; 2; 4) = 2(1; 1; 2)$

$\overrightarrow{CB} = (-2; 10; -4) = 2(-1; 5; -2)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow CA \perp CB \Rightarrow \hat{C} = 1v.$

67. Gọi M (a; 3; 2) là trung điểm cạnh BC. Ta có:

$$M: \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ y = \frac{1}{2}(y_B + y_C) \\ z = \frac{1}{2}(z_B + z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(x_B + x_C) \\ 3 = \frac{1}{2}(y_B + y_C) \\ 2 = \frac{1}{2}(z_B + z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = 6 \\ z_B + z_C = 4 \end{cases}$$

Tương tự N(0; 2; 0) là trung điểm AC, ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_C = 0 \\ y_A + y_C = 4 \\ z_A + z_C = 0 \end{cases}$$

P(2; –2; 4) là trung điểm AB: $\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ y_A + y_B = -4 \\ z_A + z_B = 8 \end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_B + x_C = 2 \\ x_C + x_A = 0 \end{cases}$

$$x_A + x_B + x_C = 3$$

Thay: $x_B + x_C = 2$ vào, ta được $x_A = 1$

$x_A + x_C = 0$ vào, ta được $x_B = 3$

$x_A + x_B = 4$ vào, ta được $x_C = -1$

Làm tương tự, ta tìm được tung độ và độ cao của đỉnh A, B, C.

ĐS: A(1; –3; 2), B(3; –1; 6), C(–1; 7; –2)

68. Gọi C(0; y; 0). Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-1; y+3; -7)$, $\overrightarrow{BC} = (-5; y-7; 5)$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (y+3)^2 + (-7)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (y-7)^2 + 5^2}$$

Do AC = BC $\Leftrightarrow 1^2 + (y+3)^2 + 7^2 = 5^2 + (y-7)^2 + 5^2$

$$\Leftrightarrow y + 3 = \pm\,(y - 7) \Rightarrow y = 2$$

ĐS: C(0; 2; 0)

69. $\overrightarrow{BA} = (-1; 3; -4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{26}$

$\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\sqrt{26}$

Theo tính chất đường phân giác, ta có: $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow DA = \frac{1}{2}\,DC \Rightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

Tọa độ điểm D được tính theo công thức:

$$D\begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_C}{1-k} = -\dfrac{2}{3} & \left(k = -\dfrac{1}{2}\right) \\ y = \dfrac{y_A - ky_C}{1-k} = \dfrac{11}{3} & \Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{11}{3}; 1\right) \\ z = \dfrac{z_A - kz_C}{1-k} = 1 & \end{cases}$$

$$\overrightarrow{BD} = (-\frac{8}{3}; \frac{14}{3}; -2) \Rightarrow BD = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{2}{3}\sqrt{74}.$$

70. Gọi M là trung điểm AC thì M (0; y; 0) và:

$$M\begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2}(x_A + x_C) \\ y = \dfrac{1}{2}(y_A + y_C) \\ 0 = \dfrac{1}{2}(z_A + z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + x_C = 0 \\ 2 + z_C = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; y; -2).$$

Gọi N là trung điểm BC thì N(x; 0; z) và

$$N\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_B + x_C) \\ y = \dfrac{1}{2}(y_B + y_C) \\ z = \dfrac{1}{2}(z_B + z_C) \end{cases} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}(5 + y_C) \Rightarrow C(4; -5; -2)$$

71. Do gốc toạ độ O là trung điểm AC nên C(–6; –2; –3). Toạ độ trọng tâm G được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \dfrac{1}{3}x_B \\ y_G = \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \dfrac{1}{3}y_B \\ z_G = \dfrac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \dfrac{1}{3}z_B \end{cases}$$

ĐS: C(06; –2; –3), B(0; 3y_G; 0)

Mà G ∈ Oy nên G(0; y_G; 0) cho ta B(0; y_B; 0) và $y_B = 3y_G$.

72. Gọi B(x_B; 0; 0) và C(0; y_C; z_C). Theo công thức:

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \\ z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{3}(-1 + x_B) \\ 0 = \frac{1}{3}(2 + y_C) \\ 0 = \frac{1}{3}(3 + z_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 1 \\ y_C = -2 \\ z_C = -3 \end{cases}$$

ĐS: B(1; 0; 0), C(0; –2; –3)

73. Ở lớp 11, ta đã biết thể tích tứ diện bằng $\frac{1}{6}$ thể tích hình hộp tương ứng.

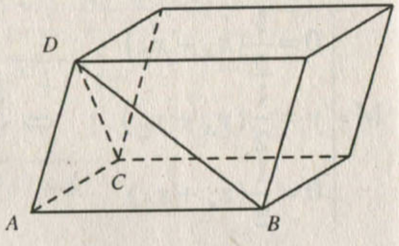
Mà $V_{\text{hộp}} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|$

$\overrightarrow{AB} = (3; 6; 8)$

$\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$

$\overrightarrow{AD} = (2; 2; 2)$

D($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$)



Hình 95

$$= 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3.10 - 6.6 + 3(-4) = -18$$

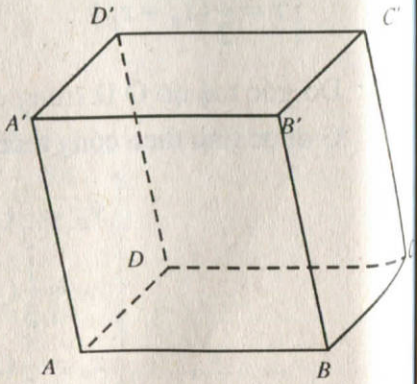
74. a) ABCD.A'B'C'D' là hình hộp nên:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} = (3; 1; 1)$,

$\overrightarrow{DC} = (x_C - 1; y_C - 1; z_C - 2)$

$\Rightarrow x_C = 4; y_C = 2; z_C = 3$

$\Rightarrow$ C(4; 2; 3) $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$,



Hình 96

$\overrightarrow{CC'} = (0; -7; -2)$

$\overrightarrow{AA'} = (x' + 1; y'; z' - 1)$

$\Rightarrow$ A'(–1; 7; –1)

Tương tự, ta tính được D'(1; –6; 0), B'(2; –6; 0).

b) $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right]\overrightarrow{AA'}\right|$

$$\text{Ta có } \begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (3; 1; 1) \\ \overrightarrow{AD} = (2; 1; 1) \\ \overrightarrow{AA'} = (0; -7; -2) \end{matrix} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) = (0; -1; 1)$$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(0;-1;1).(0;-7;-2)| = 6$.

75. Rõ ràng ΔABC vuông cân đỉnh A. Chọn hệ trục toạ độ như hình 97. Xác định toạ độ của các điểm:

A(0; 0; 0),

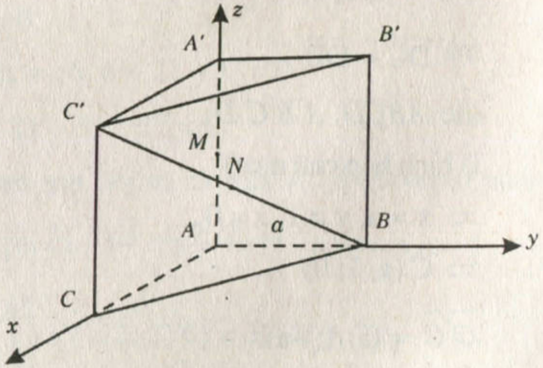
B(0; a; 0),

C_1(a; 0; $a\sqrt{2}$),

A_1(0; 0; $a\sqrt{2}$),

M(0; 0; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$),

N($\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$)



Hình 97

Toạ độ các vectơ: $\overrightarrow{BC_1} = (a; -a; a\sqrt{2})$.

$\overrightarrow{MN} = (\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$, $\overrightarrow{AA_1} = (0; 0; a\sqrt{2})$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AA_1} = 0 \Rightarrow MN \perp AA_1$

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC_1} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + 0 = 0 \Rightarrow MN \perp BC_1 \Rightarrow$ MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1.

Tính thể tích tứ diện MA_1BC_1

Ta cần tính toạ độ của các vectơ sau:

$$\overrightarrow{MA_1} = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{MB} = \left(0; a; -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{MC_1} = \left(a; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), \left[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}\right], = \left(\frac{2^2\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right).$$

Vậy $\left|\left[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MB}\right].\overrightarrow{MC_1}\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $V_{MA_1BC_1} = \frac{1}{6}.\frac{a^3\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

76. $\overrightarrow{BD} = (-a; 1; 0)$

Đặt C = (x; y; z)

$\overrightarrow{DC} = (x; y-1; z)$

$\overrightarrow{OB} = (a; 0; 0)$

mà $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$

(do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật)

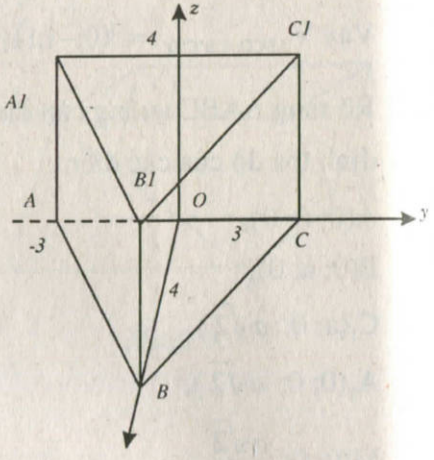
$\Rightarrow x = a, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow C (a; 1; 0)$

$\overrightarrow{O'C} = (a; 1; -a)$.

Muốn $BD \perp O'C \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{O'C} = 0$.

Mà $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{O'C} = -a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$.



Hình 98

77. Ta biết $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right]\overrightarrow{BD}\right|$

$\overrightarrow{BA} = (-2; 2; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 2; 9)$, $\overrightarrow{BD} = (-9; -5; 10)$.

$$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix}2 & 3\\2 & 9\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & -2\\9 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-2 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}\right) = (12; 24; -8).$$

$\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BD} = -12.9 - 5.24 - 8.10 = -308.$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|-308| = \frac{154}{3}$.

Diện tích tam giác

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}.\left|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}2 & 9\\-5 & 10\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}9 & 2\\10 & -9\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}2 & 2\\-9 & -5\end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\sqrt{65^2 + (-101)^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14490}.$$

Gọi AH là đường cao xuất phát từ A, thể tích tứ diện ABCD là:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\,\text{dt}\,(\Delta BCD).AH \Rightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{\text{dt}(\Delta BCD)}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{154}{\frac{1}{2}\sqrt{14490}} = \frac{308}{\sqrt{14490}}$$

78. Hai mp song song với nhau nhận cùng một véctơ pháp tuyến nên mp phải tìm có dạng $2x - 3z + D = 0$.

Vì nó qua điểm (3; –2; – 7) nên ta có: $6 + 21 + D = 0$.

$\Rightarrow D = -27$ và mp phải tìm là: $2x - 3z - 27 = 0$.

79. Mp phải tìm (α) vuông góc với mp (P) và đi qua A, B có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{AB}\right]$, $\vec{n} = (1; -2; 3)$, $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\2 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}3 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 2\end{vmatrix}\right) = (-12; 3; 6) = 3(-4; 1; 2).$$

Mặt phẳng (α) đi qua A (1; –1; –2), nên phương trình mặt phẳng (α) là:

$-4(x - 1) + 1(y + 1) + 2(z + 2) = 0$

$\Leftrightarrow -4x + y + 2z + 9 = 0.$

80. Mặt phẳng phải tìm (α) qua trục tung nên (α) có phương trình dạng $Ax + Cz = 0$ $(A^2 + C^2 \neq 0)$. Vì $A(1; 4; -3) \in \alpha$ nên $A - 3C = 0$. Chọn $A = 3, C = 1 \Rightarrow (\alpha)$: $3x + z = 0$.

Do đó phương trình mặt phẳng (α) phải tìm là:

$$3x + z = 0.$$

81. Mặt phẳng song song với trục Ox nên phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$By + Cz + D = 0.$$

Mặt phẳng đi qua 2 điểm A(7; 2; –3) và B (5; 6; –4) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2B - 3C + D = 0 \\ 6B - 4C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6B + 9C - 3D = 0 \\ 6B - 4C + D = 0 \end{cases} +$$

$$5C - 2D = 0$$

Chọn C = 4 ⇒ D = 10 ⇒ B = 1.

Vậy phương trình mặt phẳng phải tìm $y + 4z + 10 = 0$

82. Mp (P) cắt Ox tại A(–24; 0; 0), cắt Oy tại B(0; 20; 0) ⇒ OA = 24; OB = 20

$$\text{dt }(\Delta BAO) = \frac{1}{2}\ OA.OB = 240 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

83. Mp (P) cắt Ox tại A(6; 0; 0) ⇒ OA = 6

mp (P) cắt Oy tại B(0; –4; 0) ⇒ OB = 4

mp (P) cắt Oz tại C(0; 0; 2) ⇒ OC = 2

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}\text{dt }(\Delta BAO) . CO = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . 6 . 4 . 2 = 8 \text{ (đơn vị thể tích)}$$

84. Điểm trên Oy có toạ độ (0; y_o; 0). Theo công thức khoảng cách ta có:

$$\frac{|2y_0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4 \Leftrightarrow |y_0 - 1| = 6$$

$$\Leftrightarrow y_0 - 1 = \pm\ 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 7 \\ y_0 = -5 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = \dfrac{11}{43} \end{array}\right.$$

ĐS: Có hai điểm: (0; 7; 0) và (0; –5; 0).

85. Điểm trên Ox có toạ độ (x_o; 0; 0). Theo công thức tính khoảng cách, ta có:

$$\frac{|12x_o + 1|}{\sqrt{12^2 + (-16)^2 + 15^2}} = \frac{|2x_o - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|12x_o = 1|}{25} = \frac{|2x_o - 1|}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(12x_o + 1) = \pm 25(2x_o - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 2 \\ x_o = \dfrac{11}{43} \end{array}\right.$$

ĐS: Có hai điểm: (2; 0; 0) và ($\frac{11}{43}$; 0; 0).

86. Ta thấy (P) // (Q) vì $\overrightarrow{n_p} = \overrightarrow{n_Q}$. Lấy A ∈ (P), chẳng hạn A(0; 0; 3). Lấy B ∈ (Q), chẳng hạn B(0; 0; –1). Gọi I là trung điểm AB thì toạ độ I(0; 0; 1). I cách đều (P) và (Q). Mp cách đều (P) và (Q) phải đi qua I và song song với (P), (Q). PT mp đó: $3x + 2y - (z - 1) = 0$ ⇔ $3x + 2y - z + 1 = 0$.

87. Đó là tập hợp những điểm M(x, y, z) cách đều hai mp đã cho

$$\Rightarrow \frac{|x - 3y + 2z - 5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2}} = \frac{|3x - 2y - z + 3|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 2z - 5 = \pm\ (3x - 2y - z + 3)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y - 3z + 8 = 0 \\ 4x - 5y + z - 2 = 0 \end{array}\right.$$

88. 1) Thay toạ độ A vào vế trái của (P) được 3 > 0:

Thay toạ độ O vào vế trái của (P) được – 7 < 0

⇒ A và O thuộc hai phía của (P)

2) Thay toạ độ A và vế trái của (Q) được $-4 < 0$:

Thay toạ độ O vào vế trái của (Q) được $-18 < 0$

$\Rightarrow$ A và O cùng phía của (Q)

89. 1) Thay toạ độ A và vế trái của (P) được $9 > 0$.

Thay toạ độ A vào vế trái của (Q) được $4 > 0$.

Thay toạ độ O vào vế trái của (P) và (Q) được $-5 < 0$; $3 > 0$.

Suy ra A và O nằm trong hai góc kề nhau của nhị diện này.

2) Làm tương tự như trên, ta thấy A và O nằm trong cùng một góc nhị diện này.

90. Làm như bài 87, ta được hai PT mp phân giác của góc nhị diện (P, Q) là: $4x + 24y - 16x + 7 = 0$ (1) và $8x - 4y - 4z + 5 = 0$ (2). Trong hai PT mp phân giác trên, ta chọn mp nào, ta lại làm tiếp như bài 89, ta lấy PT (2).

91. Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc là tích vô hướng của hai vectơ pháp tuyến bằng $0 \Rightarrow 3 - 5.3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

92. a) Gọi toạ độ $A_1(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = (x; y + z; z)$, $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$

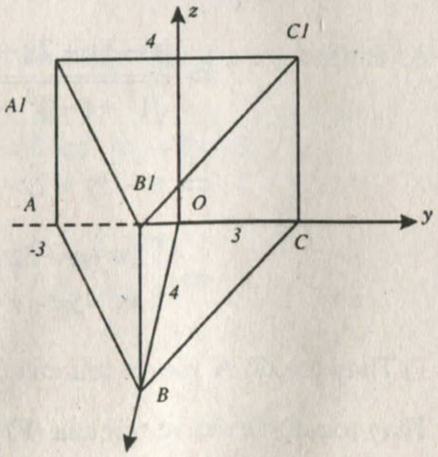
$ABC.A_1B_1C_1$ là hình hộp đứng nên $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$ suy ra $x = 0$, $y = -3$, $z = 4$

Vậy $A_1 = (0; -3; 4)$.

Tương tự ta tính được $C_1(0; 3; 4)$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$.

$\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$.



Hình 99

Vậy mặt phẳng (BCC_1B_1) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}\right]$

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & -4\\4 & 0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-4 & 3\\0 & 0\end{vmatrix}\right) = (12; 16; 0) = 4(3; 4; 0)$$

Do đó phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) là: $3(x - 4) + 4(y - 0) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$.

Khoảng cách $A(0; -3; 0)$ đến (BCC_1B_1) là:

$$d = \frac{|-12 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{24}{5} = \text{bán kính mặt cầu.}$$

Phương trình của mặt cầu tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) là:

$$x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{576}{25}.$$

b) Từ toạ độ của $A_1(0; -3; 4)$, $B_1(4; 0; 4)$, ta tìm được toạ độ của M là trung điểm của A_1B_1: $M = (2; -\frac{3}{2}; 4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (2; \frac{3}{2}; 4)$; $\overrightarrow{BC_1} = (-4; 3; 4)$

$$\overrightarrow{n_P} = [\,\overrightarrow{AM}\,;\ \overrightarrow{BC_1}\,] = (-6; -24; 12) = -6(1; 4; -2).$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x + 4(y + 3) - 2z = 0$

$$\Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$$

Dễ thấy $B(4; 0; 0) \notin$ (P) nên (P) đi qua A, M và song song với BC_1.

93. 1) Đặt $z = t$, ta có PT tham số của (d):

$$\begin{cases} x = -\cos\alpha + t\sin\alpha \\ y = \sin\alpha + t\cos\alpha \\ z = t \end{cases} \quad \text{có vectơ chỉ phương } \vec{u} = (\sin\alpha, \cos\alpha, 1).$$

2) Trục Oz có vectơ chỉ phương $\vec{k} = (0;0;1)$. Theo công thức về góc tạo bởi đường thẳng (d) và trục Oz là:

$$\cos\varphi = \frac{|1|}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1}.\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^0.$$

3) Mp (P) chứa (d) và vuông góc mp Oxy có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u} = (\sin\alpha;\cos\alpha;1)$ và $\vec{v} = (0,0,1)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u},\vec{v}]$.

$$\vec{n} = [\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & \sin\alpha\\ 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ 0 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$= (\cos\alpha;-\sin\alpha;0)$$

mp (P) đi qua điểm M(–cosα; sinα; 0) của (d) nên có PT:

$$\cos\alpha\,(x+\cos\alpha) - \sin\alpha\,(y-\sin\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow x.\cos\alpha - y\sin\alpha + 1 = 0$$

PT đường thẳng (d') là: $\begin{cases} x\cos\alpha - \sin\alpha + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

4) Khoảng cách từ O đến (d') ∈ mp Oxy là bán kính đường tròn nhận (d') làm tiếp tuyến:

$$R = \frac{|1|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = 1$$

Đường thẳng (d') luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định thuộc mp Oxy có PT: $x^2 + y^2 = 1$.

94. 1) Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là toạ độ điểm cố định của (d_k) thì hệ PT sau luôn đúng với ∀ k: $\begin{cases} x_o + k(z_o - 1) = 0 \\ x_o - k(x_o + y_o) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = y_o = 0 \\ z_o = 1 \end{cases}$ ⇒ toạ độ điểm cố định (0; 0; 1).

2) Có: $\begin{cases} x + kz - k = 0 \\ x - kx - ky = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow k(x + y + z - 1) = 0$$

$\Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$ (vì $k \neq 0$), đây là pt mặt phẳng cố định chứa (d_k).

95. Mặt phẳng phải tìm thuộc chùm mặt phẳng:

$$m(x - 2z) + n(3x - 2y + z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 3n)x - 2ny + (-2m + n)z - 3n = 0.$$

Vì nó vuông góc với mặt phẳng $x - 2y + x + 5 = 0$ nên ta có:

$$m + 3n + 4n - 2m + n = 0 \Leftrightarrow -m + 8n = 0 \Leftrightarrow 8n = m.$$

Chọn m = 8, n = 1, ta có PT mp phải tìm:

$$11x - 2y - 15z - 3 = 0$$

96. Ta có $\overrightarrow{u_1} = (2;-3;4)$, $M_1 = (1;-2;5)$, $\overrightarrow{u_2} = (3;2;-2)$, $M_2 = (7;2;1)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (6;4;-4) = 2(3;2;-2)$$

Xét tích:

$$\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 3\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$= -3.2 + 2.16 - 2.13 = 0$$

⇒ hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng.

Mặt phẳng phải tìm có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right)$$

$$= (-2;16;13)$$

PT mp phải tìm là: $-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0$

$$\Leftrightarrow -2x + 16y + 13z - 31 = 0$$

97. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng đã cho và vuông góc với mp $x + 2y + 3z + 4 = 0$, có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;4;1)$ và $\vec{v} = (1;2;3)$, đi qua (2;–2;1). PT mp (P) là:

$$\Leftrightarrow (x - 2)\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} + (y + 2)\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} + (z - 1)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 0$$

$$10(x - 2) - 8(y + 2) + 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y + z - 19 = 0$$

Phương trình hình chiếu là: $\begin{cases} 5x - 4y - 19 = 0 \\ x + 2y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$

98. (d_1) đi qua điểm $M_1(-3; -2; 6)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; 3; 4)$.

(d_2) đi qua điểm $M_2(5; -1; 20)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (1; -4; 1)$

d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=0$ và $\overrightarrow{u_1} \neq \overrightarrow{u_2}$.

Có $\overrightarrow{M_1M_2} = (8;1;14)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\cdot\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] = 8\begin{vmatrix}3&4\\-4&1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&2\\1&1\end{vmatrix} + 14\begin{vmatrix}2&3\\1&-4\end{vmatrix}$$

$$= 8.19 + 2 - 14.11 = 0(\text{đpcm})$$

99. Viết phương trình mp (P) chứa (d_2) và song song (d_1).

Phương trình tham số của (d_1) và (d_2):

$$(d_1)\begin{cases}x = t\\ y = 4 - t\\ z = -1 + 2t\end{cases} \qquad (d_2)\begin{cases}x = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3}\\ y = t\\ z = -2 + t\end{cases}$$

Mp (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;2)$ và $\overrightarrow{u_2} = (-1;3;3)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix}-1&2\\3&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}\right) =$

$= (-9; -5; 2)$, đi qua điểm $(\frac{2}{3}; 0; -2)$ nên có PT:

$$-9(x - \frac{2}{3}) - 5y + 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow -9x - 5y + 2z + 10 = 0.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách từ $M_1(0;4;-1)$ đến (P): $\dfrac{|-5.4 - 2.1 + 10|}{\sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2}} = \dfrac{12}{\sqrt{110}}$.

100. Theo giả thiết: MA = MB = MC $\Rightarrow$ M thuộc các mp trung trực (P), (Q) của AB và AC $\Rightarrow$ M $\in$ (d) là giao tuyến (P), (Q).

Mặt phẳng (P) qua trung điểm của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1)$ làm vectơ pháp tuyến. Toạ độ trung điểm của AB: $(0; \frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ nên PT mp (P):

$$-2x + y - \frac{3}{2} - (z - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + y - z - 1 = 0.$$

Mặt phẳng (Q) qua trung điểm của AC: $(\frac{3}{2};-1;\frac{3}{2})$ và nhận $\overrightarrow{AC} = (1;-4;1)$ làm vectơ pháp tuyến, nên PT mp (Q):

$$x - \frac{3}{2} - 4(y+1) + z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 7 = 0$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng (d) có PT:

$$\begin{cases}2x - y + z + 1 = 0\\ x - 4y + z - 7 = 0\end{cases}$$

101. 1) Đường thẳng (Δ) phải tìm là giao tuyến của hai mp (P) và (Q). Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc (d) nên có vectơ pháp tuyến:

$\vec{n} = (3;1;1)$ và có PT:

$3x + y - 1 + z - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0.$

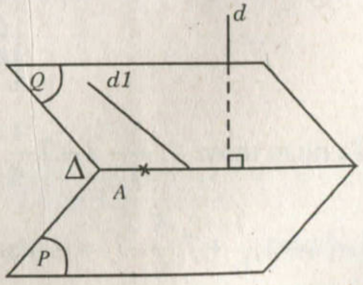
Mặt phẳng (Q) thuộc chùm mp:

$m(x+1) + n(x + y - z + 2) = 0$

Vì nó qua A nên: $m + n(1-1+2) = 0$

$\Leftrightarrow m = -2n$. Chọn $m = -2$; $n = 1$;

có PT mp (Q): $-x + y - z = 0$.



Hình 100

PT đường thẳng (Δ) phải tìm là: $\begin{cases}x - y + z = 0\\ 3x + y + z - 2 = 0\end{cases}$

2) a) Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (6;-4;4) = 2(3;-2;2)$

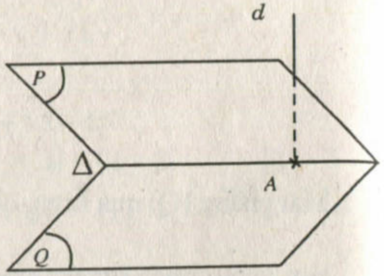
$= 2.\vec{u} \Rightarrow$ d//AB, nghĩa là d và AB cùng thuộc một mp.

b) ĐS. I(2;0;4)

102. Giao điểm A của d và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-3} \\ 2x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(2; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{7}{2})$



Hình 101

103. Chuyển đổi PT đường thẳng sang tham số:

$$\begin{array}{r} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ + \quad 4x - 2y - 2z - 2 = 0 \\ \hline 9x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{9} + \dfrac{5}{9}y. \end{array}$$

Đặt y = t, có PT tham số: $\begin{cases} x = \dfrac{7}{9} + \dfrac{5}{9}t \\ y = t \\ z = \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{9}t \end{cases}$

Ta nhận thấy: $4.\dfrac{5}{9} - 3 + 7.\dfrac{1}{9} = 0$ chứng tỏ d// (P).

Lại có $4.\dfrac{7}{9} + 7.\dfrac{5}{9} - 7 = 0$ nên $d \subset (P)$

104. 1) Đổi ra PT tham số: Đặt y = t thì (d_1): $\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$

Đặt y = t thì (d_2): $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Đường thẳng (d_1)	*Đường thẳng (d_2)*
Đi qua điểm $M_1(0;0;-4)$	Đi qua điểm $M_2(1;0;2)$
Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;2)$	Vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-3;1;-1)$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;6)$$

Xét tích $\overrightarrow{M_1M_2} . \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 \neq 0$$

$\Rightarrow (d_1)$ chéo (d_2)

2) Trước hết, viết PT mp (P) chứa (d_2) và song song (d_1), mp (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ nên có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$= (-3; -7; 2)$ và PT mp (P) là: $-3(x-1) - 7y + 2(z-2) = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 7y + 2z - 1 = 0$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là khoảng cách từ M_1 đến (P):

$$d = \frac{|-8-1|}{\sqrt{3^2 + 7^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{62}}$$

3) ĐS: $\begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$

Đường thẳng phải tìm là giao tuyến của hai mp: Q (M; d_1) và R(M; d_2).

Mặt phẳng (Q) thuộc chùm mp: $m(x + y) + n(x - y + z + 4) = 0$.

Vì nó đi qua M (2; 3; 1) nên ta có: $5m + 4n = 0 \Leftrightarrow 5m = -4n$.

Chọn $m = -4$, $n = 5$, ta có PT mp (Q): $x - 9y + 5z + 20 = 0$.

Mặt phẳng (R) thuộc chùm mp: $p(x + 3y - 1) + q(y + z - 2) = 0$.

Vì nó qua M nên ta có: $10p + 2q = 0 \Leftrightarrow 5p = -q$. Chọn $p = 1$

$q = 5$, ta có PT mp (R): $x - 2y - 5z + 9 = 0$.

105. ĐS: $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

106. Có N $(-3;2;5)$

$$\overrightarrow{MN} = (-4;0;6) \Rightarrow MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2.\sqrt{13}$$

107. Theo tính chất hình bình hành thì giao điểm hai đường chéo là trung điểm mỗi đường chéo, nghĩa là M là trung điểm AC. Theo công thức toạ độ trung điểm:

$$M\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{2}(x_A - 2)) \\ 2 = \dfrac{1}{2}(y_A + 3) \quad \Rightarrow A(4;\ 1;\ -2) \\ -\dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}(z_A - 5) \end{cases}$$

Cũng theo tính chất hình bình hành: AB // CD nên đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CD}(2;\ 1;\ -2)$. Vậy PT đường thẳng chứa cạnh AB là:

$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

2. Mặt phẳng hình bình hành có cặp vectơ chỉ phương:

$\overrightarrow{AD}(-4;3;-5)$ và $\overrightarrow{CD} = (2;1;-2)$ nên có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}] = \left(\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (-1;-18;-10)$$

$$\vec{n} = -(1;18;10).$$

PT mp hình bình hành là $x + 18(y - 4) + 10(z + 7) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 18y + 10z - 2 = 0$$

Khoảng cách từ gốc toạ độ đến mp hình bình hành được tính theo công thức:

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2 + 18^2 + 10^2}} = \frac{2}{5\sqrt{17}}$$

108. 1) Điểm A không thuộc hai đường trung tuyến đã cho.

Gọi các đường trung tuyến là MB: $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-1}{1}$

$$CN: \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

* Vì M ∈ BM nên toạ độ M thoả mãn: $\begin{cases} x_M = 3 - 2t \\ y_M = 6 + 2t \\ z_M = 1 + t \end{cases}$ (1)

Vì M là trung điểm AC nên:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{2}(x_A + x_C) = \dfrac{1}{2}(1 + x_C) \\ y_M = \dfrac{1}{2}(y_A + y_C) = \dfrac{1}{2}(2 + y_C) \\ z_M = \dfrac{1}{2}(z_A + z_C) = \dfrac{1}{2}(5 + z_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_M = 1 + x_C \\ 2y_M = 2 + y_C \\ 2z_M = 5 + z_C \end{cases} \quad (2)$$

Vì C ∈ CN nên toạ độ C thoả mãn: $\begin{cases} x_C = 4 + s \\ y_C = 2 - 4s \\ z_C = 2 + s \end{cases}$ (3)

Thay (1) và (3) vào (2)

$$\begin{cases} 6 - 4t = 1 + 4 + s \\ 12 + 4t = 2 + 2 - 4s \\ 2 + 2t = 5 + 2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4t = s \\ -2 - t = s \\ -5 + 2t = s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1;\ 8;\ 2) \\ C(1;\ 14;\ -1 \end{cases}$$

* Vì N ∈ CN nên toạ độ N thoả mãn: $\begin{cases} x_N = 4 + t \\ y_N = 2 - 4t \\ z_N = 2 + t \end{cases}$ (4)

Vì N là trung điểm AB nên:

$$\begin{cases} x_N = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + x_B) \\ y_N = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(2 + y_B) \\ z_N = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}(5 + z_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_N = 1 + x_B \\ 2y_N = 2 + y_B \\ 2z_N = 5 + z_B \end{cases} \quad (5)$$

Vì B ∈ BM nên toạ độ B thoả mãn: $\begin{cases} x_B = 3 - 2s \\ y_B = 6 + 2s \\ z_B = 1 + s \end{cases}$ (6)

Thay (4) và (6) vào (5):

$$\begin{cases} 8 + 2t = 1 + 3 - 2s \\ 4 - 8t = 2 + 6 + 2s \\ 4 + 2t = 5 + 1 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + t = -s \\ -2 - 4t = s \\ -2 + 2t = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ s = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(4; 2; 2) \\ B(7; 2; -1) \end{cases}$$

Cạnh AB nhận $\overrightarrow{AB} = (6; 0; -6) = 6(1; 0; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên PT cạnh AB là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{-1}$.

Cạnh AC nhận $\overrightarrow{AC} = (0; 12; -6) = 6(0; 2; -1)$ làm vectơ chỉ phương nên PT cạnh AC là: $\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-1}$.

Cạnh BC nhận $\overrightarrow{BC} = (-6; 12; 0) = 6(-1; 2; 0)$ làm vectơ chỉ phương nên PT cạnh BC là: $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{0}$.

2) Có $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6.\sqrt{2}; |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$.

Gọi D(x; y; z) là giao điểm của phân giác trong góc A với BC, thì theo tính chất phân giác trong góc A của Δ ABC ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BD} = (x - 7; y - 2; z + 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x - 1; y - 14; z + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 7 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - 1) \\ y - 2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(y - 14) \\ z + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(z + 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(11 - 2.\sqrt{10}; 4.\sqrt{10} - 6; -1)$$

Đường phân giác trong góc A nhận $\overrightarrow{AD} = (10 - 2\sqrt{10}; 4\sqrt{10} - 8; -6) = 2(5 - \sqrt{10}; 2\sqrt{10} - 4; -3)$ làm vectơ chỉ phương nên PT của nó là:

$$\frac{x-1}{5-\sqrt{10}} = \frac{y-2}{2\sqrt{10}-4} = \frac{z-5}{-3}$$

109. a) *Cách I:* Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng:

$\alpha(x - 2y + z - 4) + \beta(x + 2y - 2z + 4) = 0 \; (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - (2\alpha - 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0$

Vậy $\overrightarrow{n_p} = (\alpha + \beta; -2\alpha + 2\beta; \alpha - 2\beta)$. Ta có $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 2) // \Delta_2$ và $M_2(1; 2; 1) \in \Delta_2$.

$$(P) // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_p . \vec{u}_2 = 0 \\ M_2(1;2;1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ M_2 \notin (P) \end{cases}$$

Vậy(P): $2x - z = 0$.

Cách II: Ta có thể chuyển phương trình Δ_1 sang dạng tham số như sau:

Từ phương trình Δ_1 suy ra: $2x - z = 0$. Đặt $x = 2t' \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3t' - 2 \Rightarrow M_1(0; -2; 0) \in \Delta_1; \vec{u}_1 = (2; 3; 4) // \Delta_1. \\ z = 4t' \end{cases}$$

(Ta có thể tìm toạ độ điểm $M_1 \in \Delta_1$ bằng cách cho $x = 2$; suy ra $y = -2$;

$z = 0$ và tính $\overrightarrow{u_1} = \left(\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = (2; 3; 4)\right)$

Ta có $\overrightarrow{u_2} = (1; 1; 2) // \Delta_2$. Từ đó ta có vectơ pháp của mặt phẳng (P) là: $\overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = (2; 0; -1)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M_1(0; -2; 0)$ và $\perp \overrightarrow{n_p} = (2; 0; -1)$ là $2x - z = 0$.

Mặt khác $M_2(1; 2; 1) \notin (P)$. Suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm là:

$$2x - z = 0.$$

b) *Cách I:*

$H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (t - 1; t + 1; 2t - 3)$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6t^2 - 12t + 11}$$

$$= \sqrt{6(t-1)^2 + 5}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$.

Cách II: $H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t)$.

MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} . \overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$.

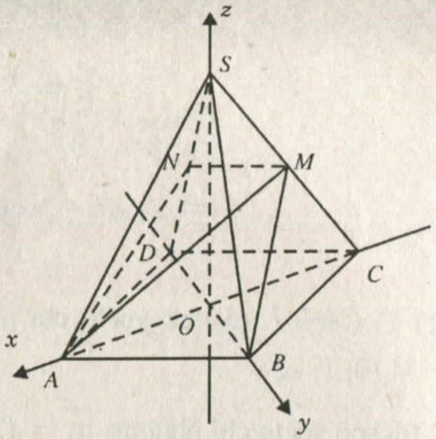
110. a) O là trung điểm của BD mà $B(0; 1; 0)$ và $O(0; 0; 0) \Rightarrow D(0; -1; 0)$

O là trung điểm của AC mà $A(2; 0; 0) \Rightarrow C(-2; 0; 0)$

M là trung điểm của SC mà $S(0; 0; 2\sqrt{2})$, $C(-2; 0; 0) \Rightarrow M(-1; 0; \sqrt{2})$

$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$;

$\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$.



Hình 102

Gọi α là góc giữa SA và BM.

Ta được: $\cos\alpha = \left|\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM})\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$.

+ Ta có: $[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$.

Vậy: $d(SA; BM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BM}\right]\right|} = \dfrac{2.\sqrt{6}}{3}$

b) Ta có $MN // AB // CD \Rightarrow$ N là trung điểm SD $\Rightarrow N(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2})$.

$$\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{SM} = (-1; 0; -\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{SN} = (0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2}).$$

$$\Rightarrow \quad [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] = (0; 4\sqrt{2}; 0).$$

$$V_{SABM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SB}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{S.AMN} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SN}\right| = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \sqrt{2}$$

111) 1) *Cách I.* (d_1) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(0; 1; -2)$

(d_2) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; 0)$ và đi qua điểm $M_2(-1; 1; 3)$

Xét biểu thức $[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}$

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right) = (-1;2;4)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1;0;5)$$

Vậy $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = (-1).(-1) + 2.0 + 4.5 = 21 \neq 0$

Do đó (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Cách II:

Như trên ta có $\overrightarrow{u_1} = (2; -1; 1)$; $\overrightarrow{u_2} = (2; 1; 0)$

Vậy $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương.

Mặt khác (d_1) và (d_2) không cắt nhau, vì nếu (d_1) cắt (d_2) thì hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+2}{1}\\ x = -1 = 2t,\ y = 1 + t,\ z = 3\end{cases}$ phải có nghiệm

Nhưng $\begin{cases}-\dfrac{1+2t}{2} = \dfrac{t}{-1}\\ \dfrac{t}{-1} = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t = \dfrac{1}{4}\\ t = -5\end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

Vậy (d_1) và (d_2) chéo nhau.

2) Gọi M, N là giao của (d) với (d_1) và (d_2)

$M \in (d_1) \Rightarrow M(2s; 1 - s; -2 + s)$

$$N \in (d_2) \Rightarrow N(-1 + 2t; 1 + t; 3)$$

$$\overrightarrow{MN} = (2t - 2s - 1; t + s; 5 - s)$$

Vì d $\perp$ (P) $\Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_p} = (7; 1; -4)$.

Do đó $\dfrac{2t - 2s - 1}{7} = \dfrac{t + s}{1} = \dfrac{5 - s}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases}5t + 9s = -1\\ 4t + 3s = -5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}s = 1\\ t = -2\end{cases} \Rightarrow M(2; 0; -1), N(-5; -1; 3)$

suy ra phương trình đường thẳng (d) là $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-4}$ hay $\dfrac{x+5}{7} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$

Nhận xét: Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d_1) và vuông góc (P), (R) là mặt phẳng chứa (d_2) và vuông góc với (P) thì (d) = (Q) $\cap$ (R) là đường thẳng phải tìm vì (d_1) và (d_2) không vuông góc với (P).

Bằng cách này ta viết được phương trình của đường thẳng (d) là:

$$\begin{cases}x + 5y + 3z + 1 = 0\\ 4x - 8y + 5z - 3 = 0\end{cases}$$

112. 1) Mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$, tâm I (1; −2; −1) R = 3.

Mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 14 = 0$

Mặt phẳng (Q) phải tìm cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3. Vậy (Q) chứa tâm I(1; −2; −1) của mặt cầu (S), (Q) lại chứa trục Ox, nên hai vectơ chỉ phương của (Q) là: $\vec{i}\,(1;0;0)$, $\overrightarrow{OI} = (1; -2; -1)$, suy ra vectơ pháp tuyến của (Q) là:

$$\vec{n}_Q = \left[\vec{i}, \overrightarrow{OI}\right] = \left(\begin{vmatrix}0 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)$$

$$= (0; 1; -2)$$

Vậy phương trình của (Q) là: $y - 2z = 0$

2) Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P), nên d nhận $\overrightarrow{n_P}\,(2; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương, phương trình của d là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

d cắt (P) tại H và cắt (S) tại 2 điểm A, B.

Thế thì mọi $M \in (S)$, $d(M,(P)) \le \max\{AH, BH\}$

Toạ độ của A, B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases};\ \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

suy ra A(–1; –1; –3), B(3; –3; 1)

$$d(A,(P)) = \frac{|2.(-1) - (1)(-1) - 3.2 - 14|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{21}{3} = 7$$

$$d(B,(P)) = \frac{|2.3 - 1(-3) + 2.1 - 14|}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Suy ra max $d(M, (P)) = 7$ khi $M \equiv A \Rightarrow M(-1; -1; -3)$

$M \in (S)$

113. $\vec{a} = 3.\vec{i} + 2.\vec{k} = 3.\vec{i} + 0\vec{j} + 2.\vec{k}$ nên toạ độ của vectơ $\vec{a} = (3; 0; 2)$

Đáp án A đúng

114. $\vec{a} = (2; 3; -1) \Rightarrow 2.\vec{a} = (4; 6; -2); -\vec{b} = (0; -1; -4), -2\vec{c} = (-2; 0; 6)$

Suy ra $2.\vec{a} - \vec{b} - 2.\vec{c} = (4; 6; -2) + (0; -1; -4) + (-2; 0; 6) = (2; 5; 0)$

Đáp án B đúng.

115. Ta có $\overrightarrow{MN} = (6; -12; 18)$, $\overrightarrow{PQ} = (6; -12; 18)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \begin{cases} MN = PQ \\ MN \,//\, PQ \end{cases}$$

Mặt khác MP không vuông góc PQ

Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Đáp án D đúng

116. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 20 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$

Vậy tâm I của mặt cầu có toạ độ I(–2; 1; 0) và R = 5

Đáp án C đúng.

117. Mặt phẳng phải tìm (α) đi qua gốc toạ độ O(0; 0; 0) và hai điểm P (4; –2; 1), Q(2; 4; –3) nên mặt phẳng (α) có 2 vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OP}$ và $\overrightarrow{OQ}$:

$$\overrightarrow{OP} = (4; -2; 1) \text{ và } \overrightarrow{OQ} = (2; 4; -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2; 14; 20) = 2(1; 7; 10)$$

Vậy phương trình của mặt phẳng (α): $x + 7y + 10z = 0$.

Đáp án C đúng.

118. Khoảng cách từ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α): $Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức: $d(M_0; \alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$\text{Vậy } d(M,(P)) = \frac{|10 - 10 + 10 + 2|}{\sqrt{(10)^2 + (10)^2 + (5)^2}} = \frac{12}{\sqrt{225}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Đáp án B đúng.

119. Mặt phẳng (α) phải tìm song song với mặt phẳng $5x - 3y + 2z - 10 = 0$ nên $\overrightarrow{n_\alpha} = (5; -3; 2)$, (α) đi qua điểm (2; 3; –1), vậy phương trình của (α): $5(x-2) - 3(y-3) + 2(z+1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 2z + 1 = 0$

Đáp án A đúng.

120. $(\Delta)\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases}$, khử t ta có: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z+1}{-8}$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ).

Đáp án B đúng

121. M(3; 6; –7), N(–5; 2; 3), Q là trung điểm của MN thì toạ độ của Q = (–1; 4; –2).

$\overrightarrow{QM} = (4;2;-5)$. Đường thẳng QM đi qua điểm Q và M, nên phương trình đường thẳng QM là:

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+7}{-5} \text{ và } \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5}$$

Đáp án D đúng

122. Đường thẳng Δ đi qua điểm M(1; 7; 3) và có vectơ chỉ phương

$\vec{u} = (2; 1; 4)$

Đường thẳng Δ' đi qua điểm M'(6; –1; –2) và có vectơ chỉ phương

$\overrightarrow{u'} = (3;-2;1)$

$\overrightarrow{MM'} = (5;-8;-5)$

Biểu thức $[\vec{u}, \overrightarrow{u'}].\overrightarrow{MM'} = (9;10;-7).(5;-8;-5)$

$$= 9.5 + 10.(-8) + 7.5 = 0$$

$\Rightarrow \Delta$ và Δ' đồng phẳng, mặt khác $[\vec{u}, \overrightarrow{u'}] = (9;10;-7) \neq \vec{0}$

Vậy Δ và Δ' cắt nhau.

Đáp án A đúng.

123. a) Ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IE}$

$$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IF}$$

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) = \vec{0}$$

b) Có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME}$

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MF}$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 4.\overrightarrow{MI}.$$

124. 1) Do G_1 là trọng tâm của ΔBCD nên

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0} \qquad (1)$$

2) Ta đã biết trọng tâm của tứ diện chia mỗi trung tuyến của tứ diện theo tỉ số 3:1 (trung tuyến của tứ diện là đoạn thẳng nối đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện) nên $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_1G}$ (2).

Từ (1) ta có: $\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{G_1D} = 0$

$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{G_1G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (kết hợp với (2))

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

3. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) = 4\overrightarrow{MG}$ (do $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$).

Tương tự $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3.\overrightarrow{MG_1}$.

Từ hệ thức đã cho ta có $12\left|\overrightarrow{MG}\right| = 12\left|\overrightarrow{MG_1}\right| \Leftrightarrow$ M cách đều hai điểm G và $G_1 \Leftrightarrow$ M thuộc mặt phẳng trung trực của GG_1.

Do đó $\{M\}$ là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng GG_1.

125. a) $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = (0;-3;-6) = -3(0;1;2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (-2;8;-4) = -2(1;-4;2)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -4 + 4 = 0 \text{ (đpcm)}$$

$$AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3; -9; -3) = -3(1; 3; 1)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-5; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD} = -5+6-1 = 0 \text{ (đpcm)}$$

$$AD \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{AD} = (-5; -1; -7) = -(5; 1; 7)$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3; -6; 3) = -3(1; 2; -1)$$

$$\overrightarrow{AD}\,.\,\overrightarrow{BC} = 5+2-7 = 0 \text{ (đpcm)}$$

b) Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AD} = -(5; 1; 7)$ nên PT đường thẳng (d):

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{7}$$

Mp (α) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (1; 3; 1)$ nên có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{n} = (-5; 2; -1)$$

PT mp (α) là: $-5.(x-3) + 2(y+1) - z = 0$

$$-5x + 2y - z + 17 = 0$$

Góc tạo bởi đường thẳng (d) và mp (α) được tính theo công thức:

$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|-25+2-7|}{\sqrt{5^2+2^2+1^2}\sqrt{5^2+1^2+7^2}}$$

$\sin\varphi = \dfrac{30}{\sqrt{30}.\sqrt{75}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Từ đây suy ra góc φ.

c) Gọi tâm mặt cầu là I(x; y; z), ta có : IA = IB = IC = ID

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases}$$

$$\overrightarrow{IA} = (3 - x; 2 - y; 6 - z)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2 + (6-z)^2}$$

$$\overrightarrow{IB} = (3 - x; -1 - y; -z)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IB}\right| = \sqrt{(3-x)^2 + (1+y)^2 + z^2}$$

$$\overrightarrow{IC} = (-x; -7-y; 3-z)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{IC}\right| = \sqrt{x^2 + (7+y)^2 + (3-z)^2}$$

$$\overrightarrow{ID} = (-2-x; 1-y; -1-z)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{ID}\right| = \sqrt{(2+x)^2 + (1-y)^2 + (1+z)^2}$$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} (3-x)^2 + (2-y)^2 + (6-z)^2 = (3-x)^2 + (1+y)^2 + z^2 \\ (3-x)^2 + (2-y)^2 + (6-z)^2 = x^2 + (7+y)^2 + (3-z)^2 \\ (3-x)^2 + (2-y)^2 + (6-z)^2 = (2+x)^2 + (1-y)^2 + (1+z)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 4x + 13 = 0 \\ 2x + 6y + 2z + 3 = 0 \\ 10x + 2y + 14z - 43 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\dfrac{3}{2} \\ z = 4 \end{cases}$$

$$R = IC = \sqrt{1 + \frac{121}{4} + 1} = \frac{\sqrt{129}}{2}$$

PT mặt cầu phải tìm là: $(x + 1)^2 + (y + \dfrac{3}{2})^2 + (z - 4)^2 = \dfrac{129}{4}$

126. Mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) đồng thời song song với (d_1) và (d_2) có cặp vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 2) = 2(1; -1; 1)$

và $\vec{v} = (-1; 2; -3) = -(1; -2; 3)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$:

$$\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}] = \left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & -1\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right) = (1; 2; 1)$$

PT mp tiếp xúc với mặt cầu (S) có dạng: $x + 2y + z + D = 0$

Tâm mặt cầu I(1; 1; 0) và bán kính $R = \sqrt{6}$.

Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mp tiếp xúc bằng bán kính mặt cầu:

$$\sqrt{6} = \frac{|1+2+D|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \Leftrightarrow 6 = |3+D|$$

$$\Leftrightarrow 3 + D = \pm 6 \Rightarrow D = 3 \text{ hoặc } D = -9$$

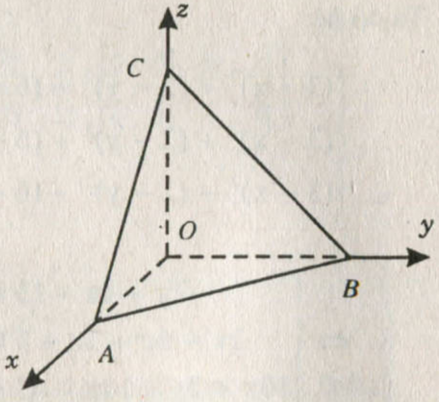
Có hai mp tiếp xúc với mặt cầu (S) mà PT là:

$$x + 2y + z + 3 = 0 \text{ và } x + 2y + z - 9 = 0$$

127. 1) Điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$ $\Rightarrow$ mp OAB chính là mặt phẳng Oxy nên có pt $z = 0$.

Tương tự pt mặt phẳng (OBC), (OCA) lần lượt là: $x = 0$, $y = 0$.

Mặt phẳng (ABC) chắn trên ba trục toạ độ tại ba điểm A, B, C nên pt tổng quát của mp(ABC):



Hình 79

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \text{ (pt đoạn chắn)}$$

2) Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện OABC. Khi đó r chính là khoảng cách từ I đến các mặt phẳng (OAB), (OBC), (OAC) và (ABC). Vậy toạ độ của I(r; r; r).

Khoảng cách từ O đến mp(ABC):

$$d(O,(ABC)) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^2}} = \frac{6}{7}.$$

Như vậy $0 < r < \frac{6}{7}$.

$$\text{Ta lại có } r = d(I, (ABC)) = \frac{\left|r+\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}r-1\right|}{\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{3})^2}} = \frac{\left|\frac{11r-6}{6}\right|}{\frac{7}{6}} = \frac{|11r-6|}{7}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{1}{3}; r = \frac{3}{2}.$$

Do $0 < r < \frac{6}{7} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$, vậy $I = (\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$

3) Đường thẳng vuông góc với mp(ABC) có vectơ chỉ phương $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

Vậy đường thẳng đi qua I vuông góc với mp(ABC) có pt:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \end{cases}$$

Tất nhiên điểm J đối xứng với I qua mp(ABC) cũng thuộc đường thẳng này. Giả sử $J(\frac{1}{3} + t_0; \frac{1}{3} + \frac{1}{2}t_0; \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t_0)$.

Gọi M là trung điểm của IJ thì M:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t_0; \frac{1}{3} + \frac{1}{4}t_0; \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t_0\right).$$

Do M ∈ mp (ABC) nên $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}t_0+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}t_0+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}t_0=1$

$$\Leftrightarrow t_0=\frac{4}{7}.\ \text{Vậy J}\ (\frac{19}{21};\frac{13}{21};\frac{11}{21}).$$

128. 1) Đs: $15x-11y-z+8=0$

2) Viết PT mp (P) qua A và vuông góc với (d). Mp (P) nhận vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4;1)$ của (d) làm vectơ pháp tuyến, nên PT mp (P): $3(x-1)+4(y-2)+z-12=0$.

Toạ độ giao điểm B của (d) và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=z+3\\ 3x+4y+z-12=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{33}{26};\frac{35}{26};-\frac{67}{26}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=(\frac{7}{26};-\frac{17}{26};-\frac{93}{26})\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{26}\sqrt{7^2+17^2+93^2}=\frac{\sqrt{8987}}{26}$$

129. a) Pt mp (KHI) đi qua ba điểm:

$$2x+2y-9z-1=0$$

PT giao tuyến của hai mp: $\begin{cases}2x+2y-9z-1=0\\ x+z=0\end{cases}$

Đặt z = t, ta có PT tham số: $\begin{cases}x=-t\\ y=\frac{1}{2}+\frac{11}{2}t\\ z=t\end{cases}$

Dạng chính tắc: $\frac{x}{-1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{z}{1}$

b) mp Oxy có pt: z = 0 có: $\cos\varphi=\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(\frac{11}{2})^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{129}}$

130. 1) có (d) $\begin{cases}2x-y-11=0\\ x-y-z+5=0\end{cases}\Rightarrow y=-11+2x.$

Đặt x = t nên có PT (d): $\begin{cases}x=t\\ y=-11+2t\end{cases}\Rightarrow\vec{u}=(1,2,-1)$

2) Ta có:

Đường thẳng (d)	Đường thẳng (Δ)
Đi qua điểm $M_1(0;-11;16)$	Đi qua điểm $M_2(5;2;6)$
$\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$	$\overrightarrow{u_2}=(2;1;3)$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(5;13;-10)$$

Biểu thức $[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}=0\Rightarrow$ (d) và Δ cùng thuộc một mp.

Mặt phẳng này có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=\left(\begin{vmatrix}2&-1\\1&3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\3&2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\right)=(7;-5;-3)$$

PT mp là: $7x-5(y+11)-3(z-16)=0$

$7x-5y-3z-7=0$

3) Mp (P) chứa (d) và chiếu (d) theo phương (Δ) nên nó là PT mp ở câu 2.

Vậy PT tổng quát của hình chiếu đó là:

$$\begin{cases}7x-5y-3z-7=0\\ 3x-2y-2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14x-10y-6z-14=0\\ 15x-10y-10z-5=0\end{cases}$$

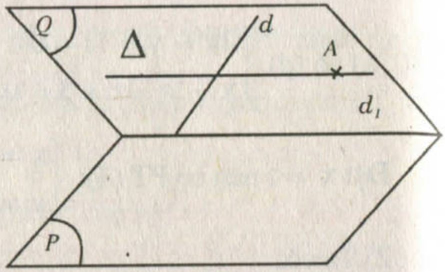
4) $x - 4z + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 + 4z$.

Đặt $z = t$ ta có PT tham số: $\begin{cases} x = -9 + 4t \\ y = -14 + 5t \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow$ PT chính tắc: $\dfrac{x+9}{4} = \dfrac{y+14}{5} = \dfrac{z}{1}$

131. Trước hết, viết PT mp (Q) chứa đường thẳng (d) đã cho và đi qua A. Đường thẳng (d) có:

PT: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$



Hình 104

Nó đi qua B(2; –4; 1) và vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 2; 2)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 5)$ nên có

$$\text{PT: } (x-2)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} + (y+4)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -14x + 17y + 4z + 92 = 0$$

Đường thẳng (d_1) có PT: $\begin{cases} -14x + 17y + 4z + 92 = 0 \\ 3x - 2y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -42x + 51y + 12z + 276 = 0 \\ 12x - 8y - 12z - 28 = 0 \end{cases} +$$

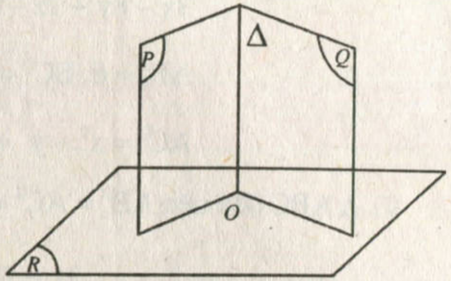
$$-30x + 43y + 248 = 0 \Rightarrow x = \frac{248}{30} + \frac{43}{30}y$$

Đặt y = t, ta có PT (d_1): $\begin{cases} x = \dfrac{248}{30} + \dfrac{43}{30}t \\ y = t \\ z = \dfrac{178}{30} + \dfrac{23}{30}t \end{cases}$

Vậy (d_1) có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (43; 30; 23)$.

Đường thẳng Δ phải tìm song song với (P) nên song song với (d_1), nghĩa là có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$. PT của (Δ) là:

$$\begin{cases} x = 3 + 43t \\ y = -2 + 30t \\ z = -4 + 23t \end{cases}$$



Hình 105

132. Gọi hai mp đã cho theo thứ tự là (P) và (Q). Vì (P), (Q) cùng vuông góc với mp (R) nên giao tuyến (Δ) của chúng phải vuông góc với (R). Do đó, vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của (Δ) là tích có hướng của hai vectơ pháp tuyến của (P) và (Q).

$$\vec{u} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -12 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (10; 15; 5) = 5(2; 3; 1)$$

Nó cũng là vectơ pháp tuyến của mp (R) nên PT mp (R) là:

$$2x + 3y + z = 0$$

133. 1) $\overrightarrow{AB} = (2; 0; 2) = 2(1; 0; 1)$

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 1)$ đi qua điểm A(0; 0; –3), nên AB có phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 0t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Thế vào pt của (P) ta có:

$$3t - 8(0 + 0.t) + 7(-3 + t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10.t = 22 \Leftrightarrow t = \frac{11}{5}$$

Vậy giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là:

$$I = \left(\frac{11}{5}; 0; -\frac{4}{5}\right)$$

2) Giả sử tìm được C(x, y, z) ∈ (P) vậy:

$$3x - 8y + 7z - 1 = 0$$

$$AB^2 = 8,\ BC^2 = (x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2$$

$$AC^2 = x^2 + y^2 + (z+3)^2$$

Vì Δ ABC đều nên $AB^2 = AC^2 = BC^2$ ta có hệ pt sau:

$$\begin{cases} 3x - 8y + 7z - 1 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6z = -1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(2)-(3)\quad \begin{cases} 3x - 8y + 7x - 1 = 0 & (1) \\ x + z = -1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Thế z = −1−x vào (1)', (3)' ta có hệ Pt.

$$\begin{cases} -4x - 8y - 8 = 0 & (1)'' \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0 & (2)'' \end{cases}$$

Rút x từ (1)" ta có x = −2y − 2. Thế vào (2)" ta được:

$$2(-2y-2)^2 + y^2 - 4(-2y-2) - 4 = 0$$

$$9y^2 + 24y + 12 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 + 8y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Thế vào (1)" ta tìm được x. Với x tìm được thế vào (2)' ta tìm được z.

Cuối cùng ta được nghiệm của hệ pt là:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

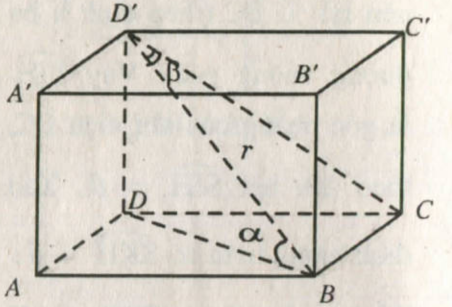
Vậy có hai điểm C trên (P) để Δ ABC đều là:

$$C(2; -2; -3);\ C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

134. Trong hình hộp chữ nhật các đường chéo đều bằng nhau, nên ta có thể lấy đường chéo BD'.

Theo tính chất hình hộp thì D'D ⊥ đáy nên BD là hình chiếu của B'D trên đáy. Vậy góc tạo bởi BD' và đáy là góc $\widehat{D'BD} = \alpha$

Cho rằng AD > BC thì mặt CDD'C' là mặt bên lớn. Theo tính chất hình hộp thì BC ⊥ mp CDD'C' nên CD' là hình chiếu của BD' trên mp này. Vậy góc tạo bởi BD' và mặt bên lớn CDD'C' là góc $\widehat{BD'C} = \beta$.



Hình 106

Tam giác vuông BCD' cho: $BC = BD' \sin\beta = d \sin\beta$,

$$CD' = BD' \cos\beta = d \cos\beta .$$

Tam giác vuông BDD' cho:

$$D'D = BD' \sin\alpha = d\sin\alpha .$$

Tam giác vuông CDD' cho:

$$CD = \sqrt{C'D^2 - D'D^2} = d.\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}$$

$$V = AB.BC.\ DD' = d^3\sin\alpha\ .\sin\beta\ .\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}\quad (*)$$

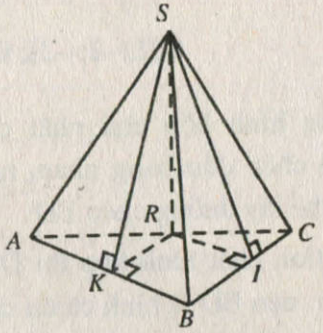
Biến đổi:

$$\cos^2\beta - \sin^2\alpha = \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\alpha) = \cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)$$

Thay vào (*) được đpcm.

135. Cho ΔABC có $B = 1v$ và $A = \alpha$, $AC = a$. Theo đầu bài: $(SAC) \perp (ABC)$ nên kẻ đường cao SH của hình chóp thì SH $\in (SAC)$. Kẻ SI $\perp$ BC thì HI là hình chiếu của SI trên đáy mà SI $\perp$ BC nên HI $\perp$ BC (theo định lí ba đường vuông góc). Vậy $\widehat{SIH}$ là góc phẳng của nhị diện BC, theo đầu bài $\widehat{SIH} = \beta$. Xác định tương tự ta có $\widehat{SKH} = \beta$.



Hình 107

Dễ thấy $\Delta SHI = \Delta SHK \Rightarrow HI = HK$, nghĩa là H cách đều hai cạnh góc vuông $\Rightarrow$ H thuộc đường phân giác của $\hat{B}$:

$$\widehat{HBI} = \widehat{HBK} = 45^0 \Rightarrow \text{BIHK là hình vuông.}$$

Có $V = \frac{1}{3}$ dt (ΔABC).SH.

Để tìm dt (ΔABC) ta tìm AB từ tam giác vuông ABC:

$$AB = AC.\cos\alpha = a\cos\alpha\ .$$

$$\text{Dt } \Delta ABC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha\ .\cos\alpha = \frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha\ .$$

Để tìm SH, ta dựa vào tam giác vuông SHK và phải tính HK. Để tìm HK, ta phải dựa vào các tam giác vuông KHA và CHI:

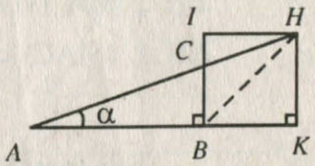
$$\begin{array}{l} HA = \dfrac{HK}{\sin\alpha} \\ + \\ HC = \dfrac{HI}{\cos\alpha} \\ \hline BC = HK\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) \text{ vì } (HK = HI) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow a = HK.\ \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow HK = \frac{a.\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45^0+\alpha)}.$$

Tam giác vuông SHK cho : $SH = HK\text{tg}\,\beta = \dfrac{a.\sin 2\alpha.\text{tg}\beta}{2\sqrt{2}\sin(45^0+\alpha)}$.

Thay vào (*) được đpcm.

Chú ý: Vì đầu bài không nói rõ Chân đường cao thuộc miền đáy Hình chóp hay không, nên H có thể là giao điểm của AC kéo dài và tia phân giác ngoài của góc $\hat{B}$. (hình: 108)



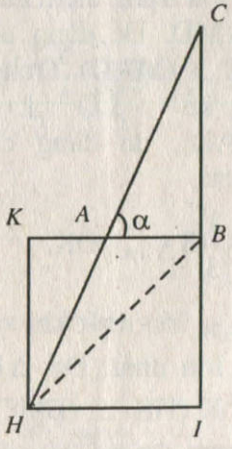
Hình 108

Nếu $AB > BC$ $(\alpha < 45^0)$ thì:

$$\begin{array}{l} HA = \dfrac{HK}{\sin\alpha} \\ - \\ HC = \dfrac{HI}{\cos\alpha} \\ \hline a = HK\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a.\sin 2\alpha.\text{tg}\beta}{2\sqrt{2}\sin(45^0-\alpha)}$$

$$\text{và } V = \frac{a^3.\sin^2 2\alpha.\text{tg}\beta}{24.\sqrt{2}\sin(45^0-\alpha)}$$



Hình 109

– Nếu AB < AC (α >45⁰) (hình 109) thì:

$$HC = \frac{HI}{\cos\alpha}$$

–

$$HA = \frac{HK}{\sin\alpha}$$

$$a = HK\ \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow HK = \frac{a.\sin 2\alpha.tg\beta}{2\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^0)}$$

$$V = \frac{a^3.\sin^2 2\alpha.tg\beta}{24.\sqrt{2}\sin(\alpha - 45^0)}$$

136. 1) Ta có $BH \perp AC$ (vì H là trực tâm của ΔABC đều)

$BH \perp MA$ (vì $AM \perp (ABC)$)

Suy ra $BH \perp (MAC) \Rightarrow MC \perp BH$

$MC \perp BK$.

(K là trực tâm Δ BMC), suy ra $MC \perp (BHK)$

* $MC \perp (BHK) \Rightarrow HK \perp MC$

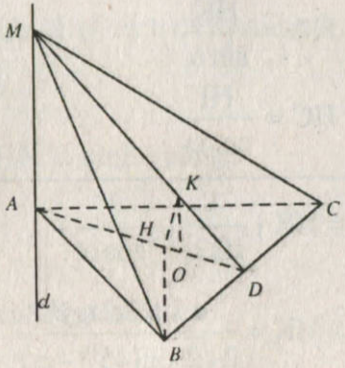
cũng chứng minh tương tự ta có: $\Rightarrow HK \perp (BMC)$

$HK \perp MB$

2) Gọi D là trung điểm của BC thì K $\in$MD. Dễ dàng chứng minh $BC \perp (MAD)$. Trong mp (MAD) kẻ $LO \perp AD$ ($O \in AD$), dễ dàng chứng minh được:

$$V_{KABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.OK.$$

Vậy V_{KABC} lớn nhất khi và chỉ khi OK lớn nhất. Do ΔHKD vuông ở K ($HK \perp (BMC) \Rightarrow$ K nằm trên đường tròn đường kính HD nên OK lớn nhất



Hình 110

$$\Leftrightarrow OK = \frac{HD}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

Khi đó thể tích lớn nhất là

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2}{48}$$

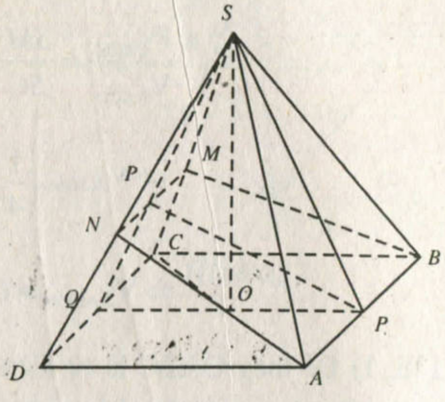
137.1) Gọi O là tâm của đáy hình chóp, P, Q theo thứ tự là trung điểm của cạnh đáy AB, CD, $R = MN \cap SQ$.

$AB \,//\, CD \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$ mà

(P) chứa AB, $MN = (P) \cap (SCD)$

$\Rightarrow AB // MN$, dễ dàng chứng minh AN = BM, nên ABMN là hình thang cân.

Ta có $SP \perp AB$, $OP \perp AB$ nên $\widehat{OSP}$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi mặt bên và đáy $\Rightarrow \widehat{OPS} = 60^0$, dễ dàng chứng minh tam giác SPQ là tam giác đều. Ta có PR là đường cao, MN là đường trung bình của Δ SCD.



Hình 111

Do đó $MN = \frac{a}{2}; PR = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy diện tích thiết diện ABMN là:

$$S_{ABMN} = \frac{AB + MN}{2}PR = \frac{a + \frac{a}{2}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}.a^2}{8}$$

2) Theo công thức tính thể tích khối chóp:

$$V = \frac{1}{3}.Bh$$

B = dt hình vuông ABCD

$B = a^2$

H = SO cũng là chiều cao của tam giác đều SPQ nên:

$$h = SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}.a^2}{6}.$$

Ta lại có:

$$\frac{V_{A.SBM}}{V_{A.SBC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{A.SMN}}{V_{A.SCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{A.SBM} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD};\ V_{A.SMN} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABMN} = (\frac{1}{4}+\frac{1}{8});\ V_{S.ABCD} = \frac{3}{8}.\frac{\sqrt{3}a^3}{6} = \frac{\sqrt{3}.a^3}{16}$$

138. 1) Dễ thấy OABC là tứ diện đều vì các tam giác OAB, OBC, OCA là những tam giác đều bằng nhau. Khoảng cách từ A đến mp Oyz là đường cao tứ diện, và tính được bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

$$V = \frac{1}{3}dt\,(\Delta OBC).AH = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

2) Áp dụng định lí hàm số cosin vào tam giác OAB, OBC, OCA ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB\cos 60^0 = a^2 + b^2 - ab$$

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2.\,OB.OC.\cos 60^0 = b^2 + c^2 - bc$$

$$CA^2 = OC^2 + OA^2 - 2.\,OC.OA.\cos 60^0 = c^2 + a^2 - ac$$

Điều kiện cần: Cho $\widehat{BAC} = 1v$ thì $bc + 2a^2 = a(b+c)$.

Thật vậy, áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông ABC, có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - bc = 2a^2 + b^2 + c^2 - a(b+c)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Điều kiện đủ: Có hệ thức $bc + 2a^2 = a(b + c)$ thì ΔABC vuông ở A.

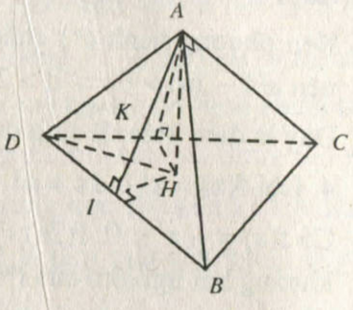
Thật vậy, ta có: $AB^2 + AC^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - a(b+c)$

$$= 2a^2 + b^2 + c^2 - (bc + 2a^2)$$

$$= b^2 + c^2 - bc = BC^2$$

Theo định lí đảo Pitago thì ΔABC vuông ở A.

3) Kẻ đường cao AH. Kẻ AI $\perp$ OB thì HI là hình chiếu của AI trên đáy nên HI $\perp$ OB theo định lí ba đường vuông góc. Tương tự: kẻ AK $\perp$ OC cũng có HK $\perp$ OC. Các tam giác vuông OAI và KAO bằng nhau (OA chung, một góc 60^0) $\Rightarrow$ AI = AK $\Rightarrow$ HI = HK nghĩa là H cách đều các cạnh của góc $\widehat{yOz} = 60^0$ nên OH là tia phân giác góc này. $\widehat{HOI} = \widehat{HOK} = 30^o$, OA = a $\Rightarrow OI = \frac{1}{2}a$ và $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ tam giác vuông HOI cho



Hình 112

$$HI = OI\,tg30^0 = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Áp dụng định lí Pitago vào tam giác vuông HAI cho:

$$AH^2 = AI^2 - HI^2 = \frac{2.a^2}{3}.$$

$$V = \frac{1}{3}dt\,(\Delta BOC).AH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}OB.\,OC.\sin 60^0.AH = \frac{abc\sqrt{2}}{12}.$$

Theo câu 2, ta có $bc + 2a^2 = a(b+c) \Leftrightarrow bc + 2a^2 = da$

$$\Leftrightarrow bc = ad - 2a^2$$

Vậy $V = \dfrac{a^2(d-2a)\sqrt{2}}{12}$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} b + c = d \\ bc = ad - 2a^2 \end{cases} \Rightarrow$ b,c là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - dx + ad - 2a^2 = 0\ (*)$$

Có $\Delta = d^2 - 4(ad - 2a^2) = (d - 2a)^2 + 4a^2 > 0$

Nên phương trình (*) chắc chắn có hai nghiệm khác nhau. Vì b, c > 0 nên $a(d - 2a) > 0 \Rightarrow d > 2a$.

Đây là điều kiện để tính được b, c.

4. Gọi $f(x) = x^2 - dx + ad - 2a^2$

Có $f(a) = -a^2 < 0$, $f(2a) = a(2a - d) < 0$ (do $d > 2a$) $\Rightarrow$ a và 2a ở trong khoảng hai nghiệm của (*) $\Rightarrow$ đpcm.

139. a) Kẻ OK ⊥ d thì OK = a và SK ⊥ d theo định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow$ d ⊥ mp (KOS) $\Rightarrow$ mp (S,d) ⊥ mp (KOS).

Tam giác vuông KAO cho:

$$OA = \frac{KO}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha},\ SO = \frac{5}{3}OA = \frac{5a}{3\sin\alpha}$$

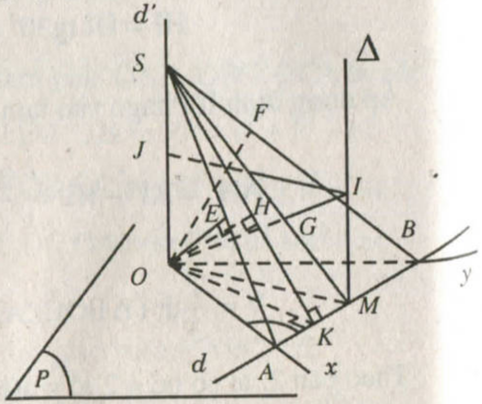
Tam giác vuông SAO cho: $SA^2 = SO^2 + OA^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{25a^2}{9\sin^2\alpha} = \frac{64a^2}{9} + \frac{a^2}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 25 = 64\sin^2\alpha + 9 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

b) Đoạn thẳng SO cố định, E và F luôn nhìn SO dưới một góc vuông nên E, F thuộc mặt cầu đường kính SO.

Mặt khác E, F cùng thuộc mp (S, d) cố định nên E, F thuộc đường tròn giao tuyến (C) của mp (S,d) và mặt cầu.



Hình 113

Kẻ OH ⊥ SK và do (1) nên OH ⊥ mp (S, d) $\Rightarrow$ H ∈ mặt cầu (SO). Đảo lại, lấy một điểm bất kì E ∈ (C) (E ≠ S và H). SE ∈ mp (S, d) nên SE cắt d ở A. Trong (P) kẻ đường thẳng vuông góc OA tại O, cắt d tại B, SB cắt (C) tại F. Vì E, F ∈ (C) nên E, F ∈ mặt cầu (SO) $\Rightarrow$ OE ⊥ SA, OF ⊥ SB.

Kết luận: Quỹ tích E, F là đường tròn (C), giao của mặt cầu (SO) và mp (S,d) trừ hai điểm S, H.

c. Xác định tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB: Vì Δ BAO là tam giác vuông đỉnh O nên trung điểm M của cạnh huyền AB cách đều ba đỉnh của Δ BAO. Từ M dựng đường thẳng Δ ⊥ (P) tại O thì mọi điểm trên Δ cách đều các đỉnh của Δ BAO vì chúng có hình chiếu trên (P) bằng nhau: MO = MA = MB. Từ trung điểm J của SO dựng mp (R) vuông góc SO, nó cắt Δ tại I. I thuộc mp trung trực (R) nên I cách đều S và O, I ∈ Δ nên I cách đều O, A, B $\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOAB.

IO cắt SM tại G. Ta phải chứng minh G là trọng tâm Δ SAB.

Thật vậy. Do Δ //SO (vì chúng cùng vuông góc với (P) nên theo Talet, ta có:

$$\frac{GM}{GS} = \frac{MI}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow GS = 2\,GM \text{ (đpcm)}.$$

140. Bài toán không sai nếu ta cho hình cầu và hình nón lồng vào nhau sao cho chân đường cao hình nón trùng với tiếp điểm của hình cầu và (P), lúc này tâm hình cầu thuộc đường cao hình nón.

Hình 114 là thiết diện qua trục hình nón, cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác cân, cắt hình cầu theo một thiết diện là hình tròn lớn (qua tâm hình cầu), có bán kính bằng R.

Do (Q) // (P) $\Rightarrow$ A'I //AB nên theo Talet ta có: $\dfrac{SI}{SH} = \dfrac{IK}{HA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{h - x}{h} = \dfrac{IK}{R} \Rightarrow IK = \dfrac{R}{h}(h - x)$. Tam giác vuông HA'J cho:

$A'I^2 = IJ.IH = (2R - x)x$

$$S = \pi\,(IK^2 + IA'^2) = \pi\left[\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 + (2R-x)x\right] \qquad (1)$$

Khi h < x < 2R (hình 114), thực hiện phép tính như trên, ta vẫn được biểu thức (1) vì $(x-h)^2 = (h-x)^2$.

b. Biến đổi (1):

$$S = \pi\left[(\frac{R^2}{h^2} - 1)x^2 + 2R(1 - \frac{R}{h})x + R^2\right]$$

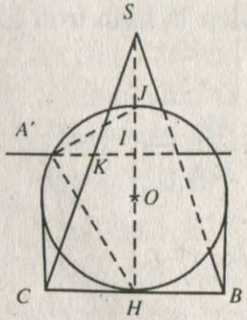
với $\begin{cases} 0 \le x < 2R \\ 0 \le x < h \end{cases}$

Đồ thị là parabol có đỉnh $\left(\dfrac{Rh}{R+h}; \dfrac{2\pi.R^2.h}{R+h}\right)$

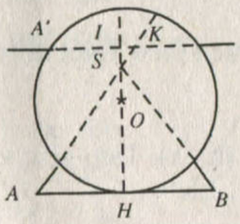
– Nếu $\dfrac{R^2}{r^2} - 1 > 0 \Rightarrow R > h$ thì parabol có bề lõm quay lên trên nên có cực tiểu S_{min} là tung độ đỉnh: $S_{min} = \dfrac{2\pi R^2 h}{R+h}$ (hình 116).

– Nếu $\dfrac{R^2}{r^2} - 1 < 0 \Rightarrow R < h$ thì Parabol có bề lõm quay xuống dưới nên có cực đại S_{max} là tung độ đỉnh: $S_{max} = \dfrac{2\pi R^2 h}{R+h}$ (hình 117).

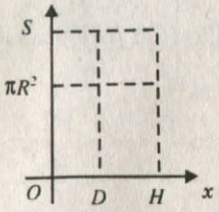
– Nếu R = h thì $S = \pi R^2$, đồ thị là đoạn thẳng song song với trục hoành (hình 117c)



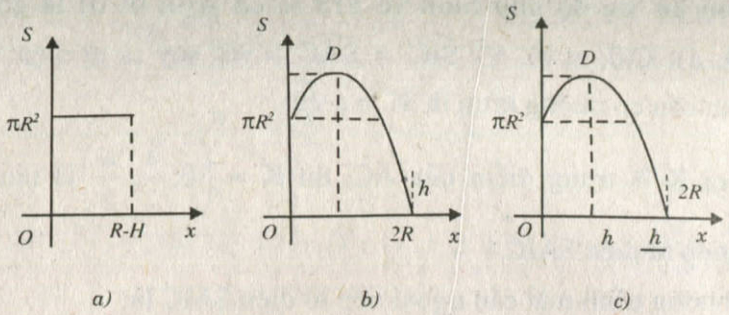
Hình 114



Hình 115

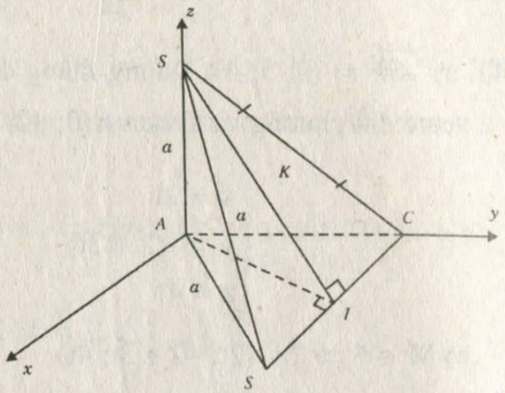


Hình 116



a) b) c)

Hình 117



Hình 118

141. a. $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}$SA.dt (ΔABC)

mà SA = a, ΔABC là tam giác đều cạnh a nên

dt (ΔABC) = $\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Gọi I là trung điểm của BC

Δ SBC cân đỉnh S (SB = SC)

$\Rightarrow$ SI $\perp$ BC, nên dt (Δ SBC) = $\dfrac{1}{2}$a . SI mà SI = $\sqrt{SA^2 + AI^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow$ dt (Δ SBC) = $\dfrac{1}{2}$a. $\dfrac{a\sqrt{7}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

Nếu gọi h là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) thì

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}$h.dt (ΔSBC) = $\dfrac{1}{3}$h. $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{h.a^2\sqrt{7}}{12}$.

$$\Rightarrow h = \frac{12.V_{SABC}}{a^2\sqrt{7}} = \frac{12.a^3\sqrt{3}}{12a^2\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

b) Chọn hệ toạ độ như hình vẽ 118 ta có A(0; 0; 0) là gốc toạ độ, S(0; 0; a), C(0; a; 0). Vì $\widehat{SIC} = \widehat{SAC} = 90^0$ suy ra tứ diện S AIC nội tiếp mặt cầu có đường kính là $SC = a\sqrt{2}$.

Nếu gọi K là trung điểm của AC, thì $K = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SAIC.

Vậy phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SAIC là:

$$x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 + (z - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}.$$

142. a) $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 4)$. Đường thẳng d đi qua A và B nhận vectơ $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương và đi qua A(0; –2; 0) nên có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

b) $M \in d \Rightarrow M\ (2t; -2 + 3t; 4t)$

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|2t - 2 + 3t - 4t + 5|}{\sqrt{3}} = \frac{|t + 3|}{\sqrt{3}}$$

$$d(M, (\alpha)) = 2.\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|t + 3|}{\sqrt{3}} = 2.\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow |t + 3| = 6$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -9 \end{array}\right.$$

Với $t = 3 \Rightarrow M_1\ (6; 7; 12)$

Với $t = -9 \Rightarrow M_2\ (-18; -29; -36)$

c) Mặt cầu (S) có đường kính AB ⇒ (S) có tâm là trung điểm I của AB và có bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

$$I(1; -\frac{1}{2}; 2)$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

⇒ Mặt cầu (S) có phương trình: $(x - 1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z - 2)^2 = \frac{29}{4}$

Ta có: $d(I, (\alpha)) = \frac{\left|1 - \frac{1}{2} + 5\right|}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6} < \frac{\sqrt{29}}{4} = R$ nên mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S).

143. a) $\overrightarrow{OA} = (4;0;0) \Rightarrow OA = 4$. Tương tự ta tính được OA = OC = AB = BC = 4 ⇒ ABCO là hình thoi.

Có $\overrightarrow{OC} = (0;4;0) \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow OA \perp OC \Rightarrow$ ABCO là hình vuông.

Mặt khác ta lại có $SO = SC = SA = SB = 2.\sqrt{11}$

⇒ SABCO là hình chóp đều.

b) Diện tích hình vuông ABCO là : $OA^2 = 16$.

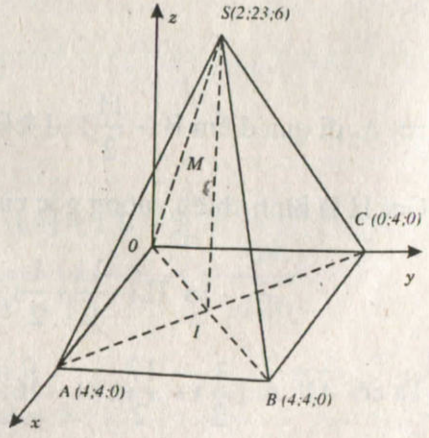
Mặt phẳng (ABCO) có hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0; 4; 0)$ nên nó chính là mặt phẳng Oxy, nên phương trình mặt phẳng (ABCO) là: z = 0; d(S, (ABCO)) = 6.

Vậy $V_{S\,ABCO} = \frac{1}{3}.6.16 = 32$(đvtt).

c) Gọi M là trung điểm của SO ⇒ M = (1; 1; 3)

Mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của SO đi qua M có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM} = (1; 1; 3)$. Vậy phương trình của (P) là:

$$(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 3) = 0$$



Hình 119

$\Rightarrow x + y + 3z - 11 = 0$

Dễ dàng có toạ độ I(2; 2; 0)

$$\overrightarrow{IS} = (0; 0; 6)$$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng

$$IS: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 6t \end{cases}$$

Tâm I của mặt cầu là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng IS, thay giá trị x = 2; y = 2; z = 6t vào phương trình mặt phẳng (P) ta có:

$$2 + 2 + 18t - 11 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{18} \Rightarrow J(2; 2; \frac{7}{3})$$

$$\Rightarrow R = OJ = \sqrt{\frac{121}{9}} = \frac{11}{3}$$

Do đó phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S OABC là:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z - \frac{7}{3})^2 = \frac{121}{9}$$

144. a) Phương trình tham số của Δ_2: $\begin{cases} x = -\frac{11}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = -14 - t \\ z = t \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta_2$ đi qua điểm B $(-\frac{11}{2}; -14; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (\frac{1}{2}; -1; 1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ_2

$$\Rightarrow H(-\frac{11}{2} + \frac{1}{2}t; -14 - t; t)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (\frac{1}{2}t - \frac{17}{2}; -t - 16; t - 5)$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}t - \frac{17}{2}) + 1(t + 16) + 1(t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}t = -\frac{27}{4} \Leftrightarrow t = -3 \text{ suy ra } H(-7; -11; -3)$$

Điểm A' là điểm đối xứng của điểm A qua Δ_2 nên H là trung điểm của AA' suy ra $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH}$ mà $\overrightarrow{AH} = (-10; -13; -8)$

$$\Rightarrow A' = (-17; -24; -11)$$

b) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua Δ_1 và song song Δ_2 phương trình mp (Q) có dạng:

$$\alpha(2x - y + 3z - 5) + \beta(x + 2y - z) = 0$$

với $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)x + (-\alpha + 2\beta)y + (3\alpha - \beta)z - 5\alpha = 0$$

Vì (Q) song song Δ_2 nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{b} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2\alpha + \beta) - 1(-\alpha + 2\beta) + 1(3\alpha - \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha - \frac{5}{2}\beta = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = \beta$$

Chọn $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 2$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q):

$$4x + 3y + z - 5 = 0$$

c) Ta có $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(\Delta_2, (Q)) = d(B, (Q))$

$$= \frac{\left|4.(-\frac{11}{2}) + 3(-14) + 1.0 - 5\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{69}{\sqrt{26}}$$

145. a) Δ_1: $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 5x - 2 = 0 \end{cases}$. Đặt z = t ta có:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Δ_1 đi qua M_1 (2; 2; 0) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-2; 1; 1)$

Δ_2 đi qua điểm M_2 (1; 0; 2) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-2;3;1)$

$$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 6 \neq 0 \Leftrightarrow \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ chéo nhau}$$

b) $M \in \Delta_2$. Để AM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của A lên Δ_2; $M = \Delta_2 \cap (P)$, (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với Δ_2.

Dễ dàng có phương trình mặt phẳng (P) là:

$$-2(x - 0) + 3(y - 1) + 1.(z - 3) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y + z - 6 = 0$$

Toạ độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1} \\ -2x + 3y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{9}{7} \\ z = \dfrac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{1}{7}; \frac{9}{7}; \frac{17}{7})$$

146. a) Mặt phẳng (Q) đi qua A, B nên nhận vectơ $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương, (Q) $\perp$ (P) nên nhận vectơ $\overrightarrow{n_P} = (1; -3; 2)$ làm vectơ chỉ phương, suy ra $\overrightarrow{n_Q} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}] = (4; 0; -2) = 2\,(2; 0; -1)$

Vậy phương trình của (Q): $2(x - 1) + 0\,(y - 2) - (z - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - z - 1 = 0$$

b) Vậy phương trình giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) là:

$$\Delta : \begin{cases} x - 3y + 2z - 6 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}]$

$$= (3; 5; 6)$$

Tìm một điểm $M \in \Delta \Rightarrow M\,(1; -1; 1)$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{6}$$

c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P), khi đó H là giao điểm của đường thẳng Δ' qua A vuông góc với (P) và mặt phẳng (P).

Dễ dàng có Δ': $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$.

Do đó toạ độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2} \\ x + 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{10}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H\,(\frac{7}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{10}{4})$$

147. a) Δ_1 đi qua điểm $M_1(0; 0; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1; -1; -2)$

Δ_2 đi qua điểm M_2 (–2; 1; 1) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (3; -1; 1)$

Mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 nên có hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$, nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = (-3; -7; 2) = (3; 7; -2)$. (P) đi qua M_1 (0; 0; –4) nên phương trình mặt phẳng (P): $3x + 7y - 2(z + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x + 7y - 2z - 8 = 0$$

b) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2 chính là khoảng cách từ một điểm của Δ_2 đến (P).

$$\text{Vậy } d(\Delta_1; \Delta_2) = d\,(M_2,(P)) = \frac{|-6 + 7 - 2 - 8|}{\sqrt{3^2 + 7^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{62}}$$

c) Gọi (α) là mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng Δ_1, suy ra (α):

$$x - 9y + 5z + 20 = 0$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa điểm M và đường thẳng Δ_2, suy ra (β) :

$$x - 2y - 5z + 9 = 0$$

Gọi $\Delta_3 = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng

$$\Delta_3: \begin{cases} x - 9y + 5z + 2 = 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

Một vectơ chỉ phương của Δ_3 là $\overrightarrow{u_3} = (55; 10; 7)$, $\overrightarrow{u_3}$ không cùng phương với $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2} \Rightarrow \Delta_3$ cắt Δ_1 và Δ_2.

148. a. Ta đã biết nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì hai vectơ pháp của hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau và ngược lại.

Ta có $\overrightarrow{n_\alpha} = (2; -1; 2)$

$\overrightarrow{n_\beta} = (1; 6; 2)$

$\overrightarrow{n_\alpha} . \overrightarrow{n_\beta} = 2.1 - 1.6 + 2.2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta} \Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$

b) Mặt phẳng (P) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên có phương trình dạng:

(P): $\lambda(2x - y + 2z - 1) + \mu(x + 6y + 2z + 5) = 0.$

$\Leftrightarrow (2\lambda + \mu)x + (-\lambda + 6\mu)y + (2\lambda + 2\mu)z + 5\mu - \lambda = 0$

Mặt phẳng (P) đi qua gốc toạ độ O nên D = 0.

$\Rightarrow 5\mu - \lambda = 0$ cho $\lambda = 5 \Rightarrow \mu = 1.$

$\Rightarrow$ (P): $11x + y + 12z = 0.$

MỤC LỤC

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG 5

Chương II. MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU 19

- I. Mặt nón, hình nón, khối nón 19
- II. Mặt trụ, hình trụ, khối trụ 23
- III. Mặt cầu 27
- Ôn tập chương II 32

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 32

- I. Hệ tọa độ trong không gian 35
- II. Mặt phẳng 48
- III. Đường thẳng 58
- Ôn tập chương III 70

ÔN TẬP CUỐI NĂM 74